Cremona, Luigi
Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane

INTRODUZIONE

AD UNA

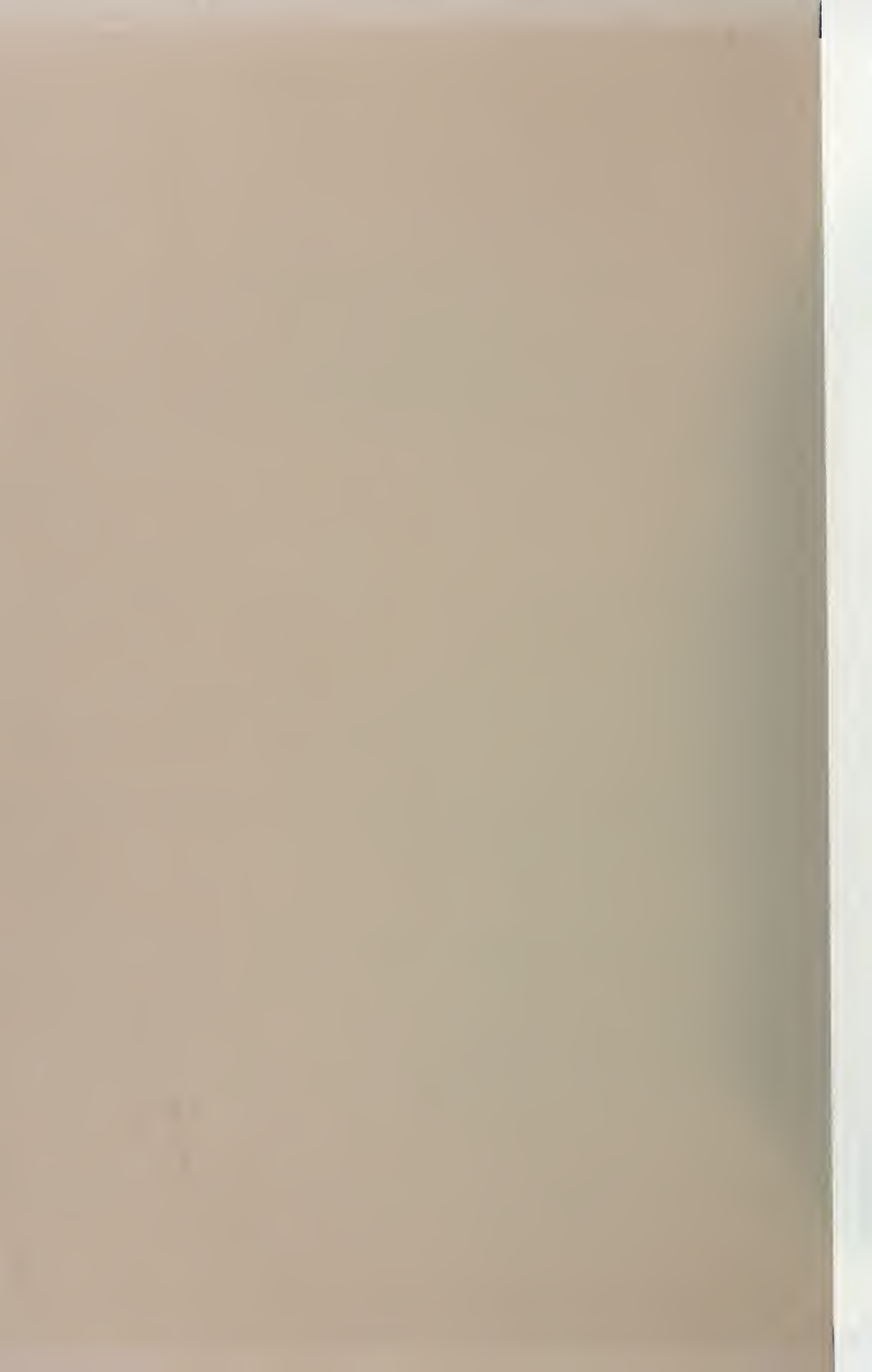
TEORIA GEOMETRICA

DELLE

CURVE PIANE.

PEL

D.r LUIGI CREMONA,

Professore di Geometria Superiore nella R. Università di Bologna.

BOLOGNA,
1862.

INTRODUZIONE

AD UNA

TEORIA GEOMETRICA

DELLE

CURVE PIANE.

PEL

D.^R LUIGI CREMONA,

Professore di Geometria Superiore nella R. Università di Bologna.

BOLOGNA,

TIPI GAMBERINI E PARMEGGIANI.

1862.

AL

COMMENDATORE PROFESSORE

FRANCESCO BRIOSCHI,

AL QUALE È DOVUTA TANTA PARTE DI PROGRESSO

DELLE SCIENZE MATEMATICHE

IN ITALIA,

QUEST' OPUSCOLO È DEDICATO

IN SEGNO DI AMMIRAZIONE, GRATITUDINE ED AMICIZIA

DAL SUO ANTICO DISCEPOLO,

L' AUTORE.

SOMMARIO.

Prefazione . . . . Pag. 1

Sezione I. Principii fondamentali . . . . » 3

Art. I. *Del rapporto anarmonico* . . . . » ivi

Relazioni fra i rapporti anarmonici di quattro punti (1). Rapporto anarmonico di quattro rette (2). Problemi (3). Sistema armonico di quattro punti o di quattro rette (4). Proprietà armonica del quadrilatero completo (5). Condizione perchè un' equazione di quarto grado rappresenti un sistema armonico (6).

Art. II. *Projettività delle punteggiate e delle stelle* . . . . » 7

Forme geometriche projettive (7). Eguaglianza de' rapporti anarmonici (8). Punteggiate projettive sovrapposte (9). Stelle projettive concentriche (10).

Art. III. *Teoria de' centri armonici* . . . . » 10

Centri armonici di un sistema di punti in linea retta, rispetto ad un dato polo (11). Relazione di reciprocità fra un centro armonico ed il polo (12). Relazione fra i centri armonici di due gradi diversi (13). Centri armonici relativi a due poli (14). Casi particolari (15—17). Le proprietà de' centri armonici non si alterano nella projezione centrale (18). Assi armonici (19, 20).

Art. IV. *Teoria dell' involuzione* . . . . » 16

Gruppi di punti in involuzione (21). Punti doppi d' un' involuzione (22). Rapporto anarmonico di quattro gruppi (23). Involuzioni projettive (24). Involuzione di secondo grado (25). Sistema equianarmonico di quattro punti (26). Condizione perchè un' equazione di quarto grado rappresenti un sistema equianarmonico (27).

Art. V. *Definizioni relative alle linee piane* . . . . » 23

Ordine di una linea luogo di punti; classe di una linea inviluppo di rette (28). Tangenti doppie e stazionarie (29). Punti doppi e cuspidi (30). Punti e tangenti multiple (31).

Art. VI. *Punti e tangenti comuni a due curve* . . . . » 25

Punti comuni a due curve d' ordini dati. Influenza de' punti multipli; tangenti comuni (32).

Art. VII. *Numero delle condizioni che determinano una curva di dato ordine o di data classe* . . . . » 26

A quante condizioni deve sodisfare una curva, se vuolsi ch' essa passi un dato numero di volte per un punto dato (33)? Quante condizioni determinano una curva di dato ordine (34)? Numero massimo de' punti doppi di una curva (35).

Art. VIII. *Porismi di* Chasles *e teorema di* Carnot . . . . » 28

Porismi generali di Chasles (36, 37). Teorema di Carnot (38). Applicazione alle curve di secondo e terz' ordine (39). Teorema relativo alle tangenti di una curva (40). Fascio di curve (41).

Art. IX. *Altri teoremi fondamentali sulle curve piane* . . . . » 36

Teorema di Jacobi (42). Teorema di Plucker (43). Teorema di Cayley (44). Applicazioni (45).

Art. X. *Generazione delle linee piane* . . . . Pag. 40
Rapporto anarmonico di quattro curve in un fascio (46). Casi particolari relativi ai punti-base d'un fascio (47, 48). Involuzione determinata da un fascio di curve sopra una retta arbitraria (49). Luogo de' punti comuni alle curve corrispondenti in due fasci projettivi (50—52). Problema sulla generazione di una curva (53). Teoremi di Chasles (54, 55). Teorema di Jonquières (56, 57). Differenti soluzioni del problema (58).
Art. XI. *Costruzione delle curve di second' ordine* . . . . » 48
Generazione di una conica mediante due stelle projettive (59), e mediante due punteggiate projettive (60). Identità delle curve di second' ordine con quelle di seconda classe (61). Problemi (62—64).
Art. XII. *Costruzione della curva di terz' ordine determinata da nove punti* . . . . » 51
Generazione di una cubica mediante due fasci projettivi, l'uno di rette, l'altro di coniche (65). Metodo di Chasles per descrivere la cubica determinata da nove punti dati (66). Diversi teoremi sulle curve di terz' ordine (67).
Sezione II. Teoria delle curve polari . . . . » 55
Art. XIII. *Definizione e proprietà fondamentali delle curve polari* . . . . » ivi
Polari di un punto rispetto alla curva fondamentale (68, 69). Rette tangenti condotte dal polo alla curva fondamentale (70). Polari di un punto della curva fondamentale (71, 72). Influenza dei punti multipli della curva fondamentale sulle polari di un polo qualunque (73, 74). Teorema di Maclaurin (75). Teorema di Cayley (76). Le prime polari de' punti di una retta formano un fascio (77). Punti doppi delle polari (78, 79). Proprietà caratteristica dei flessi (80). Inviluppo delle rette polari de' punti di una data linea (81). Inviluppi polari (82).
Art. XIV. *Teoremi relativi ai sistemi di curve* . . . . » 63
Luogo de' punti comuni a due curve corrispondenti in due serie projettive (83). Polari di un punto rispetto alle curve d'una serie (84). Curve d'una serie toccate da una retta data (85). Luogo dei poli di una retta rispetto alle curve d'una serie (86). Curve d'una serie toccate da una curva data (87). Punti doppi delle curve d'un fascio (88, 89). Curva Steineriana (88, d). Luogo de' punti di contatto fra le curve di due fasci (90). Curva Hessiana (90, a). Punti di contatto fra le curve di tre fasci (91). Inviluppo delle tangenti comuni ne' punti di contatto fra le curve di due fasci (91, a).
Art. XV. *Reti geometriche* . . . . » 71
Definizioni (92). Curva Jacobiana di tre curve date (93, 94). Hessiana di una rete (95). Rete di curve passanti per uno stesso punto (96). Rete di curve toccantisi in uno stesso punto (97). Curva Steineriana di una rete (98, a).
Art. XVI. *Formole di Plücker* . . . . » 76
Formola che dà la classe di una curva (99). Formole pei flessi e per le tangenti doppie (100). Altra relazione fra l'ordine, la classe e le singolarità di una curva (101). Caratteristiche di una curva di dato ordine priva di punti multipli (102).
Art. XVII. *Curve generate dalle polari, quando il polo si muova con legge data* . . . » 79
Ordine e singolarità della linea inviluppata dalle rette polari dei punti di una curva data (103). Proprietà di una rete (103, b). Inviluppo delle polari (di un dato ordine) dei punti di una curva data (104). Prima polare di una curva di classe data (104, d). Modo di determinare l'ordine di certi inviluppi (104, f). Doppia definizione delle polari di un punto (103, f; 104, g). Teoremi sulle polari delle curve (104, h, k). Luogo dei poli congiunti ad un polo variabile (105). Luogo delle intersezioni delle polari prima e seconda di un polo variabile (106).
Art. XVIII. *Applicazione alle curve di second' ordine* . . . . » 84
Poli e polari nelle coniche (107). Poli coniugati, polari coniugate; triangoli coniugati (108). Teorema di Hesse (109). Curve polari reciproche (110). Hessiana di una rete di coniche

coniugale ad uno stesso triangolo (110, b). Coniche polari reciproche (111). Conica le cui tangenti tagliano armonicamente due coniche date; ecc. (111, e). Triangoli coniugati ad una conica ed inscritti o circoscritti ad un'altra (111, d, f).

Art. XIX. *Curve descritte da un punto, le indicatrici del quale variino con legge data.* Pag. 90

Per un dato punto condurre una retta che ivi tocchi la polare d'alcun suo punto (112). Luogo di un punto una indicatrice del quale passi per un punto dato (113). Inviluppo delle indicatrici dei punti di una data curva (114). Luogo di un punto un'indicatrice del quale tocchi una curva data (115). Luogo di un punto variabile che unito a due punti fissi dia due rette coniugate rispetto alla conica polare del primo punto (116). Generalizzazione dell'antecedente problema (117).

Art. XX. *Alcune proprietà della curva Hessiana e della Steineriana* . . . . » 96

Le rette polari dei punti dell' Hessiana inviluppano la Steineriana (118). Caratteristiche della Steineriana (118, b—d). Le prime polari dei punti di una tangente doppia della Steineriana si toccano fra loro in due punti (119, a). Le prime polari dei punti di una tangente stazionaria della Steineriana si osculano fra loro in uno stesso punto (119, b). Un punto doppio della Steineriana è polo di una prima polare dotata di due punti doppi (120). La prima polare di una cuspide della Steineriana è dotata di un punto stazionario (121). L'ultima polare di una curva data tocca la Steineriana nei punti corrispondenti alle intersezioni della curva data coll' Hessiana (122).

Art. XXI. *Proprietà delle seconde polari* . . . . » 99

Seconde polari pure e miste di punti (123). Inviluppo delle curve d'una serie d'indice 2 (124). Seconde polari pure e miste di rette (125). Le seconde polari pure e miste delle rette passanti per un punto dato formano una rete (126). La seconda polare pura di una retta tocca l'Hessiana ovunque l'incontra (127). Rette le cui seconde polari hanno un punto doppio (128). Luogo di un punto la conica polare del quale sia inscritta in un triangolo coniugato ad una conica data (129).

Sezione III. Curve del terz' ordine . . . . » 106

Art. XXII. *L'Hessiana e la Cayleyana di una curva del terz' ordine.* . . . . » ivi

Retta polare e conica polare di un punto; una retta ha quattro poli; da un punto qualunque arrivano sei tangenti ad una cubica (130). Il rapporto anarmonico delle quattro tangenti condotte ad una cubica da un suo punto qualunque è costante (131). Cubica armonica; cubica equianarmonica (131, b). La Steineriana e l'Hessiana sono una curva unica (132). Luogo delle coppie di poli coniugati rispetto alle coniche di una rete (132, b). L'Hessiana è l'inviluppo delle rette polari de' suoi punti (132, c). Punti corrispondenti dell' Hessiana; inviluppo della retta che li unisce (133). Quadrilatero i cui vertici sono punti corrispondenti dell'Hessiana (134). La Cayleyana è il luogo de' poli congiunti ai punti dell' Hessiana (135). Una tangente della Cayleyana è divisa armonicamente dal punto di contatto e dall' Hessiana (135, c). Poloconiche pure e miste (136). Altre definizioni dell'Hessiana e della Cayleyana (136, b). Ogni poloconica pura tocca l' Hessiana in tre punti (137). Conica polare di un punto dell'Hessiana rispetto all'Hessiana medesima (137, b). Conica satellite (138). L'Hessiana è il luogo de' punti satelliti delle rette che toccano la Cayleyana (138, a).

Art. XXIII. *Fascio di curve del terz' ordine aventi i medesimi flessi* . . . . » 113

Polari armoniche de' flessi di una cubica (139). I flessi sono a tre a tre in linea retta (139, b). Cubiche sizigetiche (140). Pei flessi di una cubica passano quattro sistemi di tre rette (140, b). Punti ove l' Hessiana è toccata dalle tangenti stazionarie della cubica fondamentale (141). Punti di contatto fra l'Hessiana e la Cayleyana (141, b). La Cayleyana e l'Hessiana hanno proprietà reciproche (141, d). Proprietà dei trilateri sizigetici (142). Una cubica è Hessiana di tre cubiche ad essa sizigetiche (143). Relazione segmentaria (144). Una cubica ha soltanto tre flessi reali (144, a). L'Hessiana di una cubica equianarmonica è un trilatero; ed una cubica armonica è l'Hessiana della propria Hessiana (145).

ART. XXIV. *La curva del terz' ordine considerata come Hessiana di tre diverse reti di coniche.* . . . . Pag. 123

Una cubica ha tre sistemi di punti corrispondenti (146). Quadrilateri completi inscritti in una cubica (146, b). Proprietà di quattro punti di una cubica, aventi lo stesso tangenziale (147). Polari di un punto rispetto a più cubiche sizigetiche (148). Proprietà de' punti di contatto delle tangenti condotte ad una cubica da tre suoi punti in linea retta (149). Tre sistemi di coniche tangenti in tre punti ad una cubica; coniche aventi con essa un contatto sipunto (150).

			ERRORI	CORREZIONI (*)
Pag.	14,	linea ultima	sen *cam*	sen *cma*
»	15	» 1	sen *ca'm'*	sen *cm'a'*
»	23	» 21	apparterebbero	apparterrebbero
»	24	» 26	conci̇dono	coincidono
»	id.	» 31	(*)	(**)
»	id.	» 36	sappresenta	rappresenta
»	41	» 22	questi	queste
»	54	» ultima	535	540
»	65	» 25	pel	del
»	76	» 32	delle	della
»	89	» penultima	715	175
»	128	» quintultima	*dritter*	*dritten*

Nella *tavola*, fig. 5., si ponga la lettera *c* al punto ove concorrono le rette *a'a*, *m'm*, *o'o*.

AGGIUNTE

Pag. 7. Alla *terza nota* aggiungete: BATTAGLINI, *Sulla dipendenza scambievole delle figure* (Memorie della R. Accademia delle scienze, vol. 2, Napoli 1857, p. XXI e p. 188).

Pag. 16 e 41 (numeri 21 e 49). L'importante teorema sull' involuzione dei gruppi di punti in cui una trasversale incontra più curve d'un fascio è stato enunciato in tutta la sua generalità da PONCELET (Comptes rendus, 8 mai 1843, p. 953). STURM aveva dimostrato quel teorema per le coniche: *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Annales de GERGONNE, t. 17, Nismes 1826-27, p. 180).

(*) Di quest' *errata-corrige* sono debitore alla cortesia del mio egregio amico E. BELTRAMI.

« Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie: le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice »
CHASLES, *Aperçu historique*, p. 269).

Il desiderio di trovare, coi metodi della pura geometria, le dimostrazioni degli importantissimi teoremi enunciati dall' illustre STEINER nella sua breve Memoria « *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* » (CRELLE, t. 47), mi ha condotto ad intraprendere alcune ricerche delle quali offro qui un saggio benchè incompleto. Da poche proprietà di un sistema di punti in linea retta ho dedotto la teoria delle *curve polari* relative ad una data curva d' ordine qualsivoglia, la qual teoria mi si è affacciata così spontanea e feconda di conseguenze, che ho dovuto persuadermi, risiedere veramente in essa il metodo più naturale per lo studio delle linee piane. Il lettore intelligente giudicherà se io mi sia apposto al vero.

La parte che ora pubblico delle mie ricerche, è divisa in tre Sezioni. La prima delle quali non presenta per sè molta novità, ma ho creduto che, oltre alle dottrine fondamentali costituenti in sostanza il metodo di cui mi servo in seguito, fosse opportuno raccogliervi le più essenziali proprietà relative all' intersezione ed alla descrizione delle curve, affinchè il giovane lettore trovasse qui tutto ciò che è necessario alla intelligenza del mio lavoro.

La teoria delle curve polari costituisce la seconda Sezione, nella quale svolgo e dimostro con metodo geometrico, semplice ed uniforme, non solo i teoremi di STEINER, ch' egli aveva enunciati senza prove, ma moltissimi altri

ancora, in parte nuovi ed in parte già ottenuti dai celebri geometri Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch, Salmon, ... col soccorso dell' analisi algebrica.

Da ultimo applico la teoria generale alle curve del terz' ordine.

Oltre alle opere de' geometri ora citati, mi hanno assai giovato quelle di Maclaurin, Carnot, Poncelet, Chasles, Bobillier, Möbius, Jonquières, Bischoff ecc., allo studio delle quali è da attribuirsi quanto v' ha di buono nel mio lavoro. Io sarò lietissimo se questo potrà contribuire a diffondere in Italia l' amore per le speculazioni di geometria razionale.

SEZIONE I.

PRINCIPII FONDAMENTALI.

Art. I. Del rapporto anarmonico.

1. In una retta siano dati quattro punti a, b, c, d; i punti a, b determinano col punto c due segmenti, il cui rapporto è $\frac{ac}{cb}$, e col punto d due altri segmenti, il rapporto de' quali è $\frac{ad}{db}$. Il quoziente dei due rapporti,

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db}$$

dicesi *rapporto anarmonico* (*) de' quattro punti a, b, c, d e si indica col simbolo $(abcd)$ (**). Mutando l' ordine, nel quale i punti dati sono presi in considerazione, si hanno *ventiquattro* rapporti anarmonici, quante sono le permutazioni di quattro cose. Ma siccome:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \frac{bd}{da} : \frac{bc}{ca} = \frac{ca}{ad} : \frac{cb}{bd} = \frac{db}{bc} : \frac{da}{ac},$$

ossia:

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba),$$

così que' ventiquattro rapporti anarmonici sono a quattro a quattro eguali fra loro. Ossia, fra essi, sei soli sono essenzialmente diversi: tali sono i seguenti:

$$\begin{array}{c}(abcd),\ (acdb),\ (adbc),\\ (abdc),\ (acbd),\ (adcb).\end{array} \tag{1}$$

Si ha poi:

$$\left(\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db}\right)\left(\frac{ad}{db} : \frac{ac}{cb}\right) = 1,$$

ossia:

$$(abcd)\,(abdc) = 1,$$

(*) Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (présenté à l'Académie de Bruxelles en janvier 1830). Bruxelles 1837, pag. 34.

(**) Möbius, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig 1827, pag. 244 e seg. — Witzschel, *Grundlinien der neueren Geometrie*, Leipzig 1858, pag. 21 e seg.

ed analogamente:

$$(acdb)\,(acbd) = 1\,,$$
$$(adbc)\,(adcb) = 1\,,$$

ossia i sei rapporti anarmonici 1) sono a due a due *reciproci*. Chiamati *fondamentali* i tre rapporti

$$(abcd)\,,\ (acdb)\,,\ (adbc)\,,$$

gli altri tre sono i valori reciproci de' precedenti.

Fra quattro punti a, b, c, d in linea retta ha luogo, com'è noto, la relazione:

$$bc\,.\,ad + ca\,.\,bd + ab\,.\,cd = 0\,,$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{ca}{bc}\,.\,\frac{bd}{ad} + \frac{ab}{bc}\,.\,\frac{cd}{ad} = -\,1.$$

ossia:

$$(abcd) + (acbd) = 1\,,$$

e così pure:

$$(acdb) + (adcb) = 1\,,$$
$$(adbc) + (abdc) = 1\,;$$

cioè i sei rapporti anarmonici 1), presi a due a due, danno una somma eguale all'*unità* (rapporti anarmonici *complementari*).

Dalle precedenti relazioni segue che, dato uno de' sei rapporti anarmonici 1), gli altri cinque sono determinati. Infatti, posto $(abcd) = \lambda$, il rapporto reciproco è $(abdc) = \frac{1}{\lambda}$. I rapporti complementari di questi due sono $(acbd) = 1 - \lambda$, $(adbc) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$. Ed i rapporti reciproci degli ultimi due sono $(acdb) = \frac{1}{1-\lambda}$, $(adcb) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

2. Congiungansi i dati punti a, b, c, d ad un arbitrario punto o situato fuori della retta $ab\ldots.$ (fig. 1.ª), cioè formisi un *fascio* $o(a, b, c, d)$ di quattro rette che passino rispettivamente per a, b, c, d e tutte concorrano nel centro o. I triangoli aoc, cob danno:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ao}{bo} = \frac{\operatorname{sen} aoc}{\operatorname{sen} cob}.$$

Similmente dai triangoli aod, dob si ricava:

$$\frac{ad}{db} : \frac{ao}{bo} = \frac{\operatorname{sen} aod}{\operatorname{sen} dob}\,,$$

epperò:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \frac{\operatorname{sen} aoc}{\operatorname{sen} cob} : \frac{\operatorname{sen} aod}{\operatorname{sen} dob}\,;$$

ovvero, indicando con A, B, C, D le quattro direzioni $o(a, b, c, d)$ e con AC, CB, ... gli angoli da esse compresi:

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \frac{\text{sen } AC}{\text{sen } CB} : \frac{\text{sen } AD}{\text{sen } DB}.$$

eguaglianza che scriveremo simbolicamente così:

$$(abcd) = \text{sen}(ABCD).$$

All' espressione del secondo membro di quest' equazione si dà il nome di *rapporto anarmonico delle quattro rette* A, B, C, D. Dunque: il rapporto anarmonico di quattro rette A, B, C, D concorrenti in un centro o è eguale al rapporto anarmonico de' quattro punti a, b, c, d in cui esse sono incontrate da una trasversale. Per conseguenza, se le quattro rette A, B, C, D sono segate da un' altra trasversale in a', b', c', d', il rapporto anarmonico di questi nuovi punti sarà eguale a quello de' primi a, b, c, d. E così pure, se i punti a, b, c, d vengono uniti ad un altro centro o' mediante quattro rette A', B', C', D', il rapporto anarmonico di queste sarà eguale a quello delle quattro A, B, C, D.

3. Dati quattro punti a, b, c, d in linea retta e tre altri punti a', b', c' in un' altra retta, esiste in questa un solo e determinato punto d', tale che sia:

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

Ciò riesce evidente, osservando che il segmento $a'b'$ dev' esser diviso dal punto d' in modo che si abbia:

$$\frac{a'd'}{d'b'} = \left(\frac{ad}{db} : \frac{ac}{cb}\right) \cdot \frac{a'c'}{c'b'}.$$

Donde segue che, se i punti aa' coincidono (fig. 2.[a]), le rette bb', cc', dd' concorreranno in uno stesso punto o.

Analogamente: dati due fasci di quattro rette $ABCD$, $A'B'C'D'$, i centri de' quali siano o, o', ed i rapporti anarmonici

$$\text{sen}(ABCD), \qquad \text{sen}(A'B'C'D')$$

siano eguali, se i raggi AA' coincidono in una retta unica (passante per o e per o'), i tre punti BB', CC', DD' sono in linea retta.

Dati quattro punti a, b, c, d in una retta ed altri quattro punti a', b', c', d' in una seconda retta (fig. 3.[a]), se i rapporti anarmonici $(abcd)$, $(a'b'c'd')$ sono eguali, anche i due fasci di quattro rette $a(a'b'c'd')$, $a'(abcd)$ avranno eguali rapporti anarmonici (2). Ma in questi due fasci i raggi corrispondenti aa', $a'a$ coincidono; dunque i tre punti $(ab', a'b)$, $(ac', a'c)$, $(ad', a'd)$ sono in linea retta. Questa proprietà offre una semplice regola per costruire il punto d', quando siano dati $abcd$, $a'b'c'$.

Ed in modo somigliante si risolve l' analogo problema rispetto a due fasci di quattro rette.

4. Quattro punti a, b, c, d in linea retta diconsi *armonici* quando sia:

$$(abcd) = -1,$$

epperò anche:

$$(badc) = (cdab) = (dcba) = (abdc) = (bacd) = (cdba) = (dcab) = -1.$$

I punti a, b e così pure c, d diconsi *coniugati* fra loro (*).

Se il punto d si allontana a distanza infinita, il rapporto $\frac{ad}{db}$ ha per limite -1; quindi dall' equazione $(abcd) = -1$ si ha $\frac{ac}{cb} = 1$, ossia c è il punto di mezzo del segmento ab.

La relazione armonica $(abcd) = -1$, ossia

$$\frac{ac}{cb} + \frac{ad}{db} = 0$$

mostra che uno de' punti c, d, per esempio c, è situato fra a e b, mentre l' altro punto d è fuori del segmento finito ab. Laonde, se a coincide con b, anche c coincide con essi. E dalla stessa relazione segue che, se a coincide con c, anche d coincide con a.

La relazione armonica individua uno de' quattro punti, quando sian dati gli altri tre. Ma se questi sono coincidenti, il quarto riesce indeterminato.

Analogamente: quattro rette A, B, C, D, concorrenti in un punto, diconsi *armoniche*, quando si abbia:

$$\text{sen}\,(ABCD) = -1,$$

cioè quando esse siano incontrate da una trasversale qualunque in quattro punti armonici.

5. Sia dato (fig. 4.ª) un *quadrilatero completo*, ossia il sistema di quattro rette segantisi a due a due in sei punti a, b, c, a', b', c'. Le tre *diagonali* aa', bb', cc' formano un triangolo $\alpha\beta\gamma$. Sia x il punto coniugato armonico di β rispetto a c, c' e sia y il coniugato armonico di γ rispetto a b, b'. La retta coniugata armonica di aa' rispetto alle acb', $ac'b$ ed anche la retta coniugata armonica di $a'a$ rispetto alle $a'bc$, $a'b'c'$ dovranno passare per x e per y. Dunque questi punti coincidono insieme con α, punto comune alle bb', cc'. Donde segue che ciascuna diagonale è divisa armonicamente dalle altre due.

Di qui una semplice regola per costruire uno de' quattro punti armonici α, γ, b, b', quando siano dati gli altri tre.

Una somigliante proprietà appartiene al *quadrangolo completo* (sistema di quattro punti situati a due a due in sei rette) e dà luogo alla costruzione di un fascio armonico di quattro rette.

6. Quattro punti m_1, m_2, m_3, m_4 in linea retta, riferiti ad un punto o della retta medesima, siano rappresentati dall' equazione di quarto grado:

$$A\,.\,\overline{om}^4 + 4B\,.\,\overline{om}^3 + 6C\,.\,\overline{om}^2 + 4D\,.\,om + E = 0, \tag{2}$$

cioè siano om_1, om_2, om_3, om_4 le radici dell' equazione medesima.

(*) Il punto b dicesi *coniugato armonico* di a rispetto ai due c, d, ecc.

Se il rapporto anarmonico $(m_1m_2m_3m_4)$ è eguale a -1, si avrà:

$$m_1m_3 \cdot m_4m_2 + m_2m_3 \cdot m_4m_1 = 0,$$

ovvero, sostituendo ai segmenti $m_1m_3, \ldots$ le differenze $om_3 - om_1, \ldots$ ed avendo riguardo alle note relazioni fra i coefficienti e le radici di un' equazione:

$$A(om_1 \cdot om_2 + om_3 \cdot om_4) - 2C = 0.$$

Analogamente: le equazioni $(m_1m_3m_4m_2) = -1$, $(m_1m_4m_2m_3) = -1$ danno:

$$A(om_1 \cdot om_3 + om_4 \cdot om_2) - 2C = 0,$$
$$A(om_1 \cdot om_4 + om_2 \cdot om_3) - 2C = 0.$$

Moltiplicando fra loro queste tre equazioni si otterrà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè uno de' tre sistemi $(m_1m_2m_3m_4)$, $(m_1m_3m_4m_2)$, $(m_1m_4m_2m_3)$ sia armonico. Il risultato è simmetrico rispetto ai segmenti om_1, om_2, om_3, om_4, epperò si potrà esprimere coi soli coefficienti dell' equazione 2). Si ottiene così:

$$ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3 = 0$$

come condizione perchè i punti rappresentati dalla data equazione 2), presi in alcuno degli ordini possibili, formino un sistema armonico (*).

ART. II. Projettività delle punteggiate e delle stelle.

7. Chiameremo *punteggiata* la serie de' punti situati in una stessa retta, e *fascio di rette* o *stella* la serie delle rette (situate in un piano) passanti per uno stesso punto (centro della stella) (**). Le punteggiate e le stelle si designeranno col nome comune di *forme geometriche*. Per *elementi* di una forma geometrica intendansi i punti o le rette costituenti la punteggiata o la stella che si considera.

Due forme geometriche si diranno *projettive* quando fra i loro elementi esista tale relazione, che a ciascun elemento della prima corrisponda un solo e determinato elemento della seconda ed a ciascun elemento di questa corrisponda un solo e determinato elemento della prima (***).

Per esempio: se una stella vien segata da una trasversale arbitraria, i punti d' intersezione formano una punteggiata projettiva alla stella.

Dalla precedente definizione segue evidentemente che *due forme projettive ad una terza sono projettive fra loro.*

8. Consideriamo due rette *punteggiate*. Se i è un punto fisso della prima retta, un punto qualunque m della medesima sarà individuato dal segmento im; ed analogamente, un punto qualunque m' della seconda retta sarà individuato dal segmento $j'm'$, ove j' sia un punto fisso della stessa retta. Se le

---

(*) SALMON, *Lessons introductory to the modern higher algebra*, Dublin 1859, p. 100.
(**) BELLAVITIS, *Geometria descrittiva*, Padova 1851, p. 75.
(***) CHASLES, *Principe de correspondance entre deux objets variables etc.* (Comptes rendus de l' Acad. de France, 24 décembre 1855).

due punteggiate sono projettive e se m, m' sono punti *corrispondenti*, fra i segmenti im, $j'm'$ avrà luogo una relazione, la quale, in virtù della definizione della projettività, non può essere che della forma seguente:

$$1) \qquad \varkappa \,.\, im \,.\, j'm' + \lambda \,.\, im + \mu \,.\, j'm' + \nu = 0 \,,$$

ove $\varkappa$, λ, μ, ν sono coefficienti costanti. Quest' equazione può essere semplificata, determinando convenientemente le origini i, j'. Sia i quel punto della prima punteggiata, il cui corrispondente è all' infinito nella seconda retta: ad $im = 0$ dovrà corrispondere $j'm' = \infty$, quindi $\mu = 0$. Così se supponiamo che j' sia quel punto della seconda punteggiata, a cui corrisponde il punto all' infinito della prima, sarà $\lambda = 0$. Perciò l' equazione 1) assume la forma:

$$2) \qquad im \,.\, j'm' = k \,,$$

ove k è una costante.

Siano a, b, c, d quattro punti della prima retta; a', b', c', d' i loro corrispondenti nella seconda. Dalla 2) abbiamo:

$$j'a' = \frac{k}{ia} \,,\; j'c' = \frac{k}{ic} \,,$$

quindi:

$$a'c' = - \frac{k \,.\, ac}{ia \,.\, ic} \,.$$

Analoghe espressioni si ottengono per $c'b'$, $a'd'$, $d'b'$, e per conseguenza:

$$\frac{a'c'}{c'b'} : \frac{a'd'}{d'b'} = \frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} \,,$$

cioè:

$$(\, a'b'c'd' \,) = (\, abcd \,).$$

Abbiansi ora una stella ed una punteggiata, projettive. Segando la stella con una trasversale arbitraria si ha una nuova punteggiata, che è projettiva alla stella, e quindi projettiva anche alla punteggiata data (7). Siano a, b, c, d quattro punti della punteggiata data, A, B, C, D i corrispondenti raggi della stella ed a', b', c', d' i punti in cui questi raggi sono incontrati dalla trasversale. Avremo:

$$(\, a'b'c'd' \,) = (\, abcd \,).$$

Ma si ha anche (2):

$$(\, a'b'c'd' \,) = \text{sen}\,(\, ABCD \,) \,,$$

dunque:

$$(\, abcd \,) = \text{sen}\,(\, ABCD \,).$$

Da ultimo, siano date due stelle projettive: segandole con due trasversali (o anche con una sola) si avranno due punteggiate, rispettivamente projettive alle stelle, epperò projettive fra loro. Siano A, B, C, D quattro raggi della prima stella; A', B', C', D' i quattro corrispondenti raggi della seconda; a, b, c, d ed a', b', c', d' i quattro punti in cui questi raggi sono

incontrati dalle rispettive trasversali. A cagione della projettività delle due punteggiate abbiamo:

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

Ma si ha inoltre (2):

$$(a'b'c'd') = \text{sen}(A'B'C'D'), \qquad (abcd) = \text{sen}(ABCD),$$

dunque:

$$\text{sen}(A'B'C'D') = \text{sen}(ABCD).$$

Concludiamo che: *date due forme projettive, il rapporto anarmonico di quattro elementi quali si vogliano dell' una è eguale al rapporto anarmonico de' quattro corrispondenti elementi dell' altra.*

Da ciò consegue che, nello stabilire la projettività fra due forme geometriche, si ponno assumere ad arbitrio tre coppie d' elementi corrispondenti, per es. aa', bb', cc'. Allora, per ogni altro elemento m dell' una forma, il corrispondente elemento m' dell' altra sarà individuato dalla condizione dell' eguaglianza de' rapporti anarmonici $(a'b'c'm')$, $(abcm)$.

9. Supponiamo che due rette punteggiate projettive vengano sovrapposte l' una all' altra; ossia imaginiamo due punteggiate projettive sopra una medesima retta, quali a cagion d' esempio si ottengono segando con una sola trasversale due stelle projettive. La projettività delle due punteggiate è rappresentata dall' equazione 2):

$$im \, . \, j'm' = k.$$

Per mezzo di essa cerchiamo se vi sia alcun punto m che coincida col suo corrispondente m'.

Se le due punteggiate s' imaginano generate dal movimento simultaneo de' punti corrispondenti m, m, è evidente che questi due punti si moveranno nello stesso senso o in sensi opposti, secondo che la costante k sia negativa o positiva.

Sia $k > 0$. In questo caso è manifesto che si può prendere sul prolungamento del segmento $j'i \ldots$ un punto e tale che si abbia $ie.j'e = k$. E se si prenderà sul prolungamento di $ij' \ldots$ un punto f, che sia distante da j' quanto e da i, sarà $if.j'f = k$. Cioè i punti e, f, considerati come appartenenti ad una delle due punteggiate, coincidono coi rispettivi corrispondenti.

Ora sia $k = -h^2$. I punti m, m' non potranno, in questo caso, coincidere che entro il segmento ij'. Si tratta adunque di dividere questo segmento in due parti im, mj', il rettangolo delle quali sia h^2. Quindi, se $2h < ij'$, vi saranno due punti e, f sodisfacenti alla questione: essi sono i piedi delle ordinate perpendicolari ad ij' ed eguali ad h, del semicircolo che ha per diametro ij'. Se $2h = ij'$, non vi sarà che il punto medio di ij' che coincida col proprio corrispondente. Da ultimo, se $2h > ij'$, la quistione non ammette soluzione *reale*.

Concludiamo che *due punteggiate projettive sovrapposte hanno **due punti comuni** (reali, imaginari o coincidenti), equidistanti dal punto medio del segmento ij'.*

Che i *punti comuni* dovessero essere *al più* due si poteva prevedere anche da ciò che, se due punteggiate projettive sovrapposte hanno tre punti

coincidenti coi rispettivi corrispondenti, esse sono *identiche.* Infatti, se $(abcm) = (abcm')$, il punto m' coincide con m.

Se e, f sono i *punti comuni* di due punteggiate projettive sovrapposte, nelle quali aa', bb' siano due coppie di punti corrispondenti, si avrà l' eguaglianza de' rapporti anarmonici:

$$(abef) = (a'b'ef),$$

che si può scrivere così:

$$(aa'ef) = (bb'ef),$$

donde si ricava che il rapporto anarmonico $(aa'ef)$ è *costante*, qualunque sia la coppia aa'.

10. Siano date due stelle projettive, aventi lo stesso centro. Segandole con una trasversale, otterremo in questa due punteggiate projettive: due punti corrispondenti m, m' sono le intersezioni della trasversale con due raggi corrispondenti M, M' delle due stelle. Siano e, f i *punti comuni* delle due punteggiate. Siccome i punti e, f della prima punteggiata coincidono coi loro corrispondenti e', f' della seconda, così anche i raggi E, F della prima stella coincideranno rispettivamente coi raggi E', F' che ad essi corrispondono nella seconda stella. Dunque, due stelle projettive concentriche hanno *due raggi comuni* (reali, imaginari o coincidenti), cioè due raggi, ciascun de' quali è il corrispondente di sè stesso.

Art. III. Teoria de' centri armonici.

11. Sopra una retta siano dati n punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ ed un polo o. Sia poi m un punto della retta medesima, tale che la somma dei prodotti degli n rapporti $\frac{ma}{oa}$, presi ad r ad r, sia nulla. Esprimendo questa somma col simbolo $\Sigma\left(\frac{ma}{oa}\right)_r$, il punto m sarà determinato per mezzo della equazione:

$$1) \qquad \Sigma\left(\frac{ma}{oa}\right)_r = 0,$$

che, per l' identità $ma = oa - om$, può anche scriversi:

$$2) \qquad \Sigma\left(\frac{1}{om} - \frac{1}{oa}\right)_r = 0,$$

ossia sviluppando:

$$3) \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}\left(\frac{1}{om}\right)^r - \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{om}\right)^{r-1}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1 + \begin{bmatrix} n-2 \\ r-2 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{om}\right)^{r-2}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_2 - \ldots = 0;$$

ove il simbolo $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ esprime il numero delle combinazioni di n cose prese ad r ad r.

L' equazione 3), del grado r rispetto ad om, dà r posizioni pel punto m:

tali r punti $m_1 m_2 \dots m_r$ si chiameranno (*) *centri armonici*, del grado r, del dato sistema di punti $a_1 a_2 \dots a_n$ rispetto al polo o.

Quando $r = 1$, si ha un solo punto m, che è stato considerato da PONCELET sotto il nome di *centro delle medie armoniche* (**).

Se inoltre è $n = 2$, il punto m diviene il coniugato armonico di o rispetto ai due $a_1 a_2$ (4).

12. Se l' equazione 1) si moltiplica per $oa_1 . oa_2 \dots oa_n$ e si divide per $ma_1 . ma_2 \dots ma_n$, essa si muta evidentemente in quest' altra:

$$4) \qquad \Sigma \left(\frac{oa}{ma} \right)_{n-r} = 0,$$

donde si raccoglie:

Se m è un centro armonico, del grado r, del dato sistema di punti rispetto al polo o, viceversa o è un centro armonico, del grado $n - r$, del medesimo sistema rispetto al polo m.

13. Essendo $m_1 m_2 \dots m_r$ gli r punti che sodisfanno all' equazione 3), sia μ il loro centro armonico di primo grado rispetto al polo o; avremo l' equazione:

$$\Sigma \left(\frac{1}{o\mu} - \frac{1}{om} \right)_1 = 0$$

analoga alla 2), ossia sviluppando:

$$\frac{r}{o\mu} = \Sigma \left(\frac{1}{om} \right)_1.$$

Ma, in virtù della 3), è:

$$\Sigma \left(\frac{1}{om} \right)_1 = \frac{r}{n} \Sigma \left(\frac{1}{oa} \right)_1,$$

dunque:

$$\frac{n}{o\mu} = \Sigma \left(\frac{1}{oa} \right)_1,$$

ossia:

$$\Sigma \left(\frac{1}{o\mu} - \frac{1}{oa} \right)_1 = 0.$$

Ciò significa che μ è il centro armonico, di primo grado, del dato sistema di punti $a_1 a_2 \dots a_n$ rispetto al polo o.

Indicando ora con μ uno de' due centri armonici, di secondo grado, del sistema $m_1 m_2 \dots m_r$ rispetto al polo o, avremo l' equazione analoga alla 2):

$$\Sigma \left(\frac{1}{o\mu} - \frac{1}{om} \right)_2 = 0,$$

(*) JONQUIÈRES, *Mémoire sur la théorie des pôles et polaires etc.* (Journal de M. LIOUVILLE, aout 1857, p. 266).

(**) *Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques* (Giornale di CRELLE, t. 3, Berlino 1828, p. 229).

ossia, sviluppando:

$$\frac{r(r-1)}{2}\left(\frac{1}{o\mu}\right)^2-(r-1)\frac{1}{o\mu}\Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_1+\Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_2=0.$$

Ma, in virtù della 3), si ha:

$$\Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_1=\frac{r}{n}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1,\quad \Sigma\left(\frac{1}{om}\right)_2=\frac{r(r-1)}{n(n-1)}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_2,$$

onde sostituendo ne verrà:

$$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{o\mu}\right)^2-(n-1)\frac{1}{o\mu}\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1+\Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_2=0,$$

vale a dire:

$$\Sigma\left(\frac{1}{o\mu}-\frac{1}{oa}\right)_2=0;$$

dunque μ è un centro armonico, di secondo grado, del sistema $a_1a_2\ldots a_n$ rispetto al polo o.

Lo stesso risultato si ottiene continuando a rappresentare con μ un centro armonico, del terzo, quarto,....... $(r-1)^{esimo}$ grado, del sistema $m_1m_2\ldots m_r$ rispetto al polo o. Dunque:

Se $m_1m_2\ldots m_r$ sono i centri armonici, di grado r, del dato sistema $a_1a_2\ldots a_n$ rispetto al polo o, i centri armonici, di grado s $(s<r)$, del sistema $m_1m_2\ldots m_r$ rispetto al polo o sono anche i centri armonici, del grado s, del sistema dato rispetto allo stesso polo o.

14. Se m è un centro armonico, del grado $n-1$, del dato sistema $a_1a_2\ldots a_n$ rispetto al polo o, si avrà l'equazione 4) nella quale sia posto $r=n-1$. Vi s'introduca un arbitrario punto i (della retta data) mediante le note identità $oa=oi+ia$, $ma=ia-im$, onde si avrà:

$$\Sigma\left(\frac{oi+ia}{ia-im}\right)_1=0.$$

ossia, sviluppando:

$$5)\quad \overline{im}^{n-1}\left\{n.oi+\Sigma(ia)_1\right\}-\overline{im}^{n-2}\left\{(n-1)oi\Sigma(ia)_1+2\Sigma(ia)_2\right\}$$

$$+\overline{im}^{n-3}\left\{(n-2)oi\Sigma(ia)_2+3\Sigma(ia)_3\right\}\ldots+(-1)^{n-1}\left\{oi\Sigma(ia)_{n-1}+n\Sigma(ia)_n\right\}=0.$$

Siano $m_1m_2\ldots m_{n-1}$ i centri armonici, di grado $n-1$, del dato sistema rispetto al polo o, cioè i punti che sodisfanno alla 5); si avrà:

$$\Sigma(im)_r=\frac{(n-r)oi\Sigma(ia)_r+(r+1)\Sigma(ia)_{r+1}}{n.oi+\Sigma(ia)_1}.$$

Ora sia μ uno de' centri armonici, del grado $n-2$, del sistema $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ rispetto ad un punto o' (della retta data); avremo analogamente alla 5):

$$\overline{i\mu}^{\,n-2}\left\{(n-1)\,o'i+\Sigma(im)_1\right\}-\overline{i\mu}^{\,n-3}\left\{(n-2)\,o'i\,\Sigma(im)_1+2\,\Sigma(im)_2\right\}\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}\left\{o'i\,\Sigma(im)_{n-2}+(n-1)\,\Sigma(im)_{n-1}\right\}=0.$$

In questa equazione posto per $\Sigma(im)_r$ il valore antecedentemente scritto, si ottiene:

$$oi\,.\,o'i\left\{n(n-1)\overline{i\mu}^{\,n-2}-(n-1)(n-2)\,\overline{i\mu}^{\,n-3}\Sigma(ia)_1+(n-2)(n-3)\overline{i\mu}^{\,n-4}\Sigma(ia)_2\ldots\right\}$$

$$+(oi+o'i)\left\{(n-1)\,\overline{i\mu}^{\,n-2}\Sigma(ia)_1-2\,(n-2)\overline{i\mu}^{\,n-3}\Sigma(ia)_2+3\,(n-3)\,\overline{i\mu}^{\,n-4}\Sigma(ia)_3\ldots\right\}$$

$$+\left\{1\,.\,2\,\overline{i\mu}^{\,n-2}\Sigma(ia)_2-2\,.\,3\,\overline{i\mu}^{\,n-3}\Sigma(ia)_3+3\,.\,4\,\overline{i\mu}^{\,n-4}\Sigma(ia)_4\ldots\right\}=0;$$

il qual risultato, essendo simmetrico rispetto ad o, o', significa che:

Se $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ sono i centri armonici, di grado $n-1$, del sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto al polo o, e se $m'_1 m'_2 \ldots m'_{n-1}$ sono i centri armonici, di grado $n-1$, dello stesso sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto ad un altro polo o'; i centri armonici, del grado $n-2$, del sistema $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ rispetto al polo o' coincidono coi centri armonici, del grado $n-2$, del sistema $m'_1 m'_2 \ldots m'_{n-1}$ rispetto al polo o.

Questo teorema, ripetuto successivamente, può essere esteso ai centri armonici di grado qualunque, e allora s'enuncia così:

Se $m_1 m_2 \ldots m_r$ sono i centri armonici, di grado r, del sistema dato $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto al polo o, e se $m'_1 m'_2 \ldots m'_{r'}$, sono i centri armonici, di grado r', dello stesso sistema dato rispetto ad un altro polo o', i centri armonici, di grado $r+r'-n$, del sistema $m_1 m_2 \ldots m_r$ rispetto al polo o' coincidono coi centri armonici, di grado $r+r'-n$, del sistema $m'_1 m'_2 \ldots m'_{r'}$, rispetto al polo o.

15. Se m e μ sono rispettivamente i centri armonici, di primo grado, dei sistemi $a_1 a_2 \ldots a_n$ ed $a_2 a_3 \ldots a_n$, rispetto al polo o, si avrà:

$$\frac{n}{om}=\frac{1}{oa_1}+\frac{1}{oa_2}\cdots+\frac{1}{oa_n},$$

$$\frac{n-1}{o\mu}=\frac{1}{oa_2}+\frac{1}{oa_3}\cdots+\frac{1}{oa_n}.$$

Si supponga μ coincidente con a_1: in tal caso le due equazioni precedenti, paragonate fra loro, danno $om=o\mu$. Dunque:

Se a_1 è il centro armonico, di primo grado, del sistema di punti $a_2 a_3 \ldots a_n$ rispetto al polo o, il punto a_1 è anche il centro armonico, di primo grado, del sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto allo stesso polo.

16. Fin qui abbiamo tacitamente supposto che i dati punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ fossero distinti, ciascuno dai restanti. Suppongasi ora che r punti $a_n a_{n-1} \ldots a_{n-r+1}$

coincidano in un solo, che denoteremo con a_0. Allora, se nella equazione 5) si assume a_0 in luogo dell' origine arbitraria i, risulta evidentemente:

$$\Sigma(ia)_n = 0\,,\ \Sigma(ia)_{n-1} = 0\,, \ldots\ldots \Sigma(ia)_{n-r+1} = 0\,,$$

onde l' equazione 5) riesce divisibile per $\overline{a_0 m}^{r-1}$, cioè $r-1$ centri armonici del grado $n-1$ cadono in a_0, e ciò qualunque sia il polo o. Ne segue inoltre, avuto riguardo al teorema (13), che in a_0 cadono $r-2$ centri armonici di grado $n-2$; $r-3$ centri armonici di grado $n-3, \ldots$ ed un centro armonico di grado $n-r+1$.

17. L' equazione 3) moltiplicata per $\overline{om}^r$ e per $(-1)^r\, oa_1 . oa_2 \ldots oa_n$ diviene:

$$\overline{om}^r \Sigma(oa)_{n-r} - (n-r+1)\overline{om}^{r-1} \Sigma(oa)_{n-r+1} + \frac{(n-r+2)(n-r+1)}{1\,.\,2}\overline{om}^{r-2} \Sigma(oa)_{n-r+2} \cdots \tag{6}$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\ldots r} \Sigma(oa)_n = 0.$$

Suppongo ora che il polo o coincida, insieme con $a_n a_{n-1} \ldots a_{n-s+1}$, in un unico punto. Allora si ha:

$$\Sigma(oa)_n = 0\,,\ \Sigma(oa)_{n-1} = 0\,, \ldots\ \Sigma(oa)_{n-s+1} = 0\,;$$

quindi l' equazione che precede riesce divisibile per om^s, ossia il polo o tien luogo di s centri armonici di grado qualunque. Gli altri $r-s$ centri armonici, di grado r, sono dati dall' equazione:

$$\overline{om}^{r-s} \Sigma(oa)_{n-r} - (n-r+1)\overline{om}^{r-s-1} \Sigma(oa)_{n-r+1}$$

$$+ \frac{(n-r+2)(n-r+1)}{1\,.\,2}\overline{om}^{r-s-2} \Sigma(oa)_{n-r+2} \cdots = 0\,,$$

ove le somme $\Sigma(oa)$ contengono solamente i punti $a_1 a_2 \ldots a_{n-s}$. Dunque, gli altri $r-s$ punti m, che insieme ad o preso s volte costituiscono i centri armonici, di grado r, del sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto al polo o, sono i centri armonici, di grado $r-s$, del sistema $a_1 a_2 \ldots a_{n-s}$ rispetto allo stesso polo o.

Si noti poi che, per $s = r+1$, l' ultima equazione è sodisfatta identicamente, qualunque sia m. Cioè, se $r+1$ punti a ed il polo o coincidono insieme, i centri armonici del grado r riescono indeterminati, onde potrà assumersi come tale un punto qualunque della retta $a_1 a_2 \ldots$

18. Abbiasi, come sopra (11), in una retta R (fig. 5.^{a}) un sistema di n punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ ed un polo o; sia inoltre m un centro armonico di grado r, onde fra i segmenti ma, oa sussisterà la relazione 1). Assunto un punto arbitrario c fuori di R e da esso tirate le rette ai punti o, a, m, seghinsi queste con una trasversale qualunque R' nei punti o', a', m'. Allora si avrà:

$$\frac{ma}{ca} : \frac{m'a'}{ca'} = \frac{\operatorname{sen} cm'a'}{\operatorname{sen} cam}\,,$$

ed analogamente:

$$\frac{oa}{ca} : \frac{o'a'}{ca'} = \frac{\text{sen } co'a'}{\text{sen } coa} ;$$

donde si ricava:

$$\frac{ma}{oa} : \frac{m'a'}{o'a'} = \frac{\text{sen } ca'm'}{\text{sen } co'a'} : \frac{\text{sen } cma}{\text{sen } coa} .$$

Il secondo membro di questa equazione non varia, mutando i punti a, a'. quindi avremo:

$$\frac{ma_1}{oa_1} : \frac{ma_2}{oa_2} : \ldots : \frac{ma_n}{oa_n} = \frac{m'a'_1}{o'a'_1} : \frac{m'a'_2}{o'a'_2} : \ldots : \frac{m'a'_n}{o'a'_n} .$$

Siccome poi la relazione 1) è omogenea rispetto alle quantità $\frac{ma}{oa}$, così se ne dedurrà:

$$\Sigma \left(\frac{m'a'}{o'a'} \right)_r = 0 ,$$

cioè:

Se m è un centro armonico, di grado r, di un dato sistema di punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ situati in linea retta, rispetto al polo o posto nella stessa retta, e se tutti questi punti si projettano, mediante raggi concorrenti in un punto arbitrario, sopra una trasversale qualunque, il punto m' (projezione di m) sarà un centro armonico, di grado r, del sistema di punti $a'_1 a'_2 \ldots a'_n$ (projezioni di $a_1 a_2 \ldots a_n$) rispetto al polo o' (projezione di o).

Questo teorema ci abilita a trasportare ad un sistema di rette concorrenti in un punto le definizioni ed i teoremi superiormente stabiliti per un sistema di punti allineati sopra una retta.

19. Sia dato un sistema di n rette $A_1 A_2 \ldots A_n$ ed un'altra retta O, tutte situate in uno stesso piano e passanti per un punto fisso c. Condotta una trasversale arbitraria R che, senza passare per c, seghi le rette date in $a_1 a_2 \ldots a_n$, si imaginino gli r centri armonici $m_1 m_2 \ldots m_r$, di grado r, del sistema di punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto al polo o. Le rette $M_1 M_2 \ldots M_r$ condotte da c ai punti $m_1 m_2 \ldots m_r$ si chiameranno *assi armonici*, di grado r, del dato sistema di rette $A_1 A_2 \ldots A_n$ rispetto alla retta O.

Considerando *esclusivamente* rette passanti per c, avranno luogo i seguenti teoremi, analoghi a quelli già dimostrati per un sistema di punti in linea retta.

Se M è un asse armonico, di grado r, del dato sistema di rette $A_1 A_2 \ldots$ rispetto alla retta O, viceversa O è un asse armonico di grado $n - r$, del medesimo sistema, rispetto alla retta M.

Se $M_1 M_2 \ldots M_r$ sono gli assi armonici, di grado r, del dato sistema $A_1 A_2 \ldots A_n$, rispetto alla retta O, gli assi armonici, di grado s ($s < r$), del sistema $M_1 M_2 \ldots M_r$, rispetto ad O, sono anche gli assi armonici, del grado s, del sistema dato, rispetto alla stessa retta O.

Se $M_1 M_2 \ldots M_r$ sono gli assi armonici, di grado r, del sistema dato $A_1 A_2 \ldots A_n$, rispetto alla retta O e se $M'_1 M'_2 \ldots M'_{r'}$ sono gli assi armonici, di grado r', dello stesso sistema dato, rispetto ad un'altra retta O':

gli assi armonici, di grado $r + r' - n$, del sistema $M_1 M_2 \ldots M_r$, rispetto alla retta O', coincidono cogli assi armonici, di grado $r + r' - n$, del sistema $M'_1 M'_2 \ldots M'_r$, rispetto alla retta O.

Qualunque sia la retta O, se r fra le rette date $A_1 A_2 \ldots A_n$ coincidono in una sola, questa tien luogo di $r - 1$ assi armonici di grado $n - 1$, di $r - 2$ assi armonici di grado $n - 2, \ldots$ di un asse armonico di grado $n - r + 1$.

Se s rette $A_n A_{n-1} \ldots A_{n-s+1}$ coincidono fra loro e colla retta O, questa tien luogo di s assi armonici di qualunque grado, e gli altri $r - s$ assi armonici, di grado r, sono gli assi armonici, di grado $r - s$, del sistema $A_1 A_2 \ldots A_{n-s}$ rispetto ad O.

20. Se al n.° 18 la trasversale R' vien condotta pel punto o, ossia se la retta R si fa girare intorno ad o, il teorema ivi dimostrato può essere enunciato così:

Siano date n rette $A_1 A_2 \ldots A_n$ concorrenti in un punto c. Se per un polo fisso o si conduce una trasversale arbitraria R che seghi quelle n rette ne' punti $a_1 a_2 \ldots a_n$, i centri armonici di grado r, del sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$, rispetto al polo o, generano, ruotando R intorno ad o, r rette $M_1 M_2 \ldots M_r$ concorrenti in c.

E dagli ultimi due teoremi (19) segue:

Se s rette $A_n A_{n-1} \ldots A_{n-s+1}$ fra le date coincidono in una sola A_0, questa tien luogo di $s - (n - r)$ delle rette $M_1 M_2 \ldots M_r$. Se inoltre A_0 passa pel polo o, essa tien luogo di s delle rette $M_1 M_2 \ldots M_r$. Le rimanenti $r - s$, fra queste rette, sono il luogo de' centri armonici di grado $r - s$, (rispetto al polo o) de' punti, in cui R sega le rette $A_1 A_2 \ldots A_{n-s}$.

Art. IV. Teoria dell' involuzione.

21. Data una retta, sia o un punto fisso in essa, a un punto variabile; inoltre siano $k_1, k_2 \ldots h_1, h_2 \ldots$ quantità costanti ed ω una quantità variabile. Ora abbiasi un' equazione della forma:

$$1) \qquad k_n \overline{oa}^n + k_{n-1} \overline{oa}^{n-1} \ldots + k_0 + \omega \{ h_n \overline{oa}^n + h_{n-1} \overline{oa}^{n-1} \ldots + h_0 \} = 0.$$

Ogni valore di ω dà n valori di oa, cioè dà un gruppo di n punti a. Invece, se è dato uno di questi punti, sostituendo nella 1) il dato valore di oa, se ne dedurrà il corrispondente valore di ω, e quindi, per mezzo dell' equazione medesima, si otterranno gli altri $n - 1$ valori di oa. Dunque, per ogni valore di ω, l' equazione 1) rappresenta un gruppo di n punti così legati fra loro, che uno qualunque di essi determina tutti gli altri. Il sistema degli infiniti gruppi di n punti, corrispondenti agli infiniti valori di ω, dicesi ***involuzione*** del grado n (*).

Una semplice *punteggiata* può considerarsi come un' involuzione di primo grado (7).

(*) Jonquières, *Généralisation de la théorie de l'involution* (Annali di Matematica, tomo 2.°, Roma 1859, pag. 86).

Un' involuzione è determinata da due gruppi. Infatti, se le equazioni:

$$k_n \overline{oa}^n + k_{n-1} \overline{oa}^{n-1} \ldots = 0, \quad h_n \overline{oa}^n + h_{n-1} \overline{oa}^{n-1} \ldots = 0$$

rappresentano i due gruppi dati, ogni altro gruppo dell' involuzione sarà rappresentato dalla:

$$k_n \overline{oa}^n + k_{n-1} \overline{oa}^{n-1} \ldots + \omega (h_n \overline{oa}^n + h_{n-1} \overline{oa}^{n-1} \ldots) = 0,$$

ove ω sia una quantità arbitraria.

22. Ogni qualvolta due punti a d' uno stesso gruppo coincidano in un solo, diremo che questo è un *punto doppio* dell' involuzione. Quanti punti doppi ha l' involuzione rappresentata dall' equazione 1)? La condizione che quest' equazione abbia due radici eguali si esprime eguagliando a zero il *discriminante* della medesima. Questo discriminante è una funzione, del grado $2(n-1)$, de' coefficienti dell' equazione; dunque, eguagliandolo a zero, si avrà un' equazione del grado $2(n-1)$ in ω. Ciò significa esservi $2(n-1)$ gruppi, ciascuno de' quali contiene due punti coincidenti, ossia:

Un' involuzione del grado n ha $2(n-1)$ punti doppi.

23. Siano $a_1 a_2 \ldots a_n$ gli n punti costituenti un dato gruppo. Il centro armonico m, di primo grado, di questi punti, rispetto ad un polo o preso ad arbitrio sulla retta data, è determinato dall' equazione:

$$\frac{n}{om} = \Sigma\left(\frac{1}{oa}\right)_1;$$

donde, avuto riguardo alla 1), si trae:

$$om = -n \frac{k_0 + \omega h_0}{k_1 + \omega h_1}.$$

Quindi, il segmento compreso fra due punti m, m', centri armonici di due gruppi diversi, si potrà esprimere così:

$$mm' = om' - om = \frac{n(h_0 k_1 - h_1 k_0)(\omega - \omega')}{(k_1 + \omega h_1)(k_1 + \omega' h_1)}.$$

Siano ora m_1, m_2, m_3, m_4 i centri armonici (di primo grado e relativi al polo o) di quattro gruppi, corrispondenti a quattro valori ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 di ω; avremo:

$$(m_1 m_2 m_3 m_4) = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} : \frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_2 - \omega_4};$$

questo risultato non si altera, se invece di o si assuma un altro punto; cioè il rapporto anarmonico dei quattro centri è indipendente dal polo o. Ne segue che la serie de' centri armonici (di primo grado) di tutt' i gruppi, rispetto ad un polo o, e la serie de' centri armonici (dello stesso grado) de' gruppi medesimi, rispetto ad un altro polo o', sono due punteggiate projettive.

Per *rapporto anarmonico di quattro gruppi di un' involuzione*, intenderemo il rapporto anarmonico de' loro centri armonici di primo grado, relativi ad un polo arbitrario.

Sia m uno de' centri armonici, di grado r (rispetto ad un polo o), di un dato gruppo dell' involuzione 1). L' equazione 6) del n.° 17, avuto riguardo alla 1) del n.° 21, ci darà:

$$2)\qquad \overline{om}^{r}(k_r+\omega h_r)+(n-r+1)\overline{om}^{r-1}(k_{r-1}+\omega h_{r-1})\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}(k_0+\omega h_0)=0\,;$$

dunque: i centri armonici, di grado r, de' gruppi dell' involuzione 1) formano una nuova involuzione del grado r. Ogni valore di ω dà un gruppo dell' involuzione 1) ed un gruppo dell' involuzione 2), cioè i gruppi delle due involuzioni si corrispondono tra loro ad uno ad uno. E siccome il rapporto anarmonico di quattro gruppi dipende esclusivamente dai quattro corrispondenti valori di ω, così il rapporto anarmonico di quattro gruppi dell' involuzione 2) è eguale al rapporto anarmonico de' quattro corrispondenti gruppi dell' involuzione 1). La qual cosa risulta anche da ciò, che due gruppi corrispondenti delle due involuzioni hanno, rispetto al polo o, lo stesso centro armonico di primo grado (13).

24. Due involuzioni date sopra una stessa retta o sopra due rette diverse si diranno *projettive*, quando i centri armonici, di primo grado, de' gruppi dell' una, rispetto ad un polo qualunque, ed i centri armonici, di primo grado, de' gruppi dell' altra, rispetto ad un altro polo qualunque, formino due punteggiate projettive. Da questa definizione e da quella del rapporto anarmonico di quattro gruppi di un' involuzione si raccoglie che:

Date due involuzioni projettive, il rapporto anarmonico di quattro gruppi dell' una è eguale al rapporto anarmonico de' quattro corrispondenti gruppi dell' altra.

Cioè il teorema enunciato alla fine del n.° 8 comprende anche le involuzioni, purchè queste si risguardino quali forme geometriche, i cui elementi sono gruppi di punti.

(a) Cerchiamo come si esprima la projettività di due involuzioni.

La prima di esse si rappresenti coll' equazione 1) e la seconda con quest' altra:

$$3)\qquad K_m\,.\,\overline{OA}^{m}+\ldots+K_0+\theta\left\{H_m\,.\,\overline{OA}^{m}+\ldots+H_0\right\}=0\,,$$

ove A è un punto qualunque della retta, nella quale è data la seconda involuzione; O è l' origine de' segmenti in questa retta; H_m, K_m, ... sono coefficienti costanti.

Supponiamo, com' è evidentemente lecito, che ai gruppi $\omega=0$, $\omega=\infty$, $\omega=1$ della prima involuzione corrispondano nella seconda i gruppi $\theta=0$, $\theta=\infty$, $\theta=1$. Allora, affinchè le equazioni 1) e 3) rappresentino due gruppi *corrispondenti*, è necessario e sufficiente che il rapporto anarmonico dei quattro gruppi $\omega=(0, \infty, 1, \omega)$ della prima involuzione sia eguale a quello

de' gruppi $\theta = (0, \infty, 1, \theta)$ della seconda, cioè dev' essere $\omega = \theta$. Dunque la seconda involuzione, a cagione della sua projettività colla prima, si potrà rappresentare così:

$$4)\qquad K_m . \overline{OA}^m + \ldots + K_0 + \omega \left\{ H_m . \overline{OA}^m + \ldots + H_0 \right\} = 0.$$

Le equazioni 1) e 4), per uno stesso valore di ω, danno due gruppi corrispondenti delle due involuzioni projettive. Ed eliminando ω fra le equazioni medesime si avrà la relazione che esprime il legame o la corrispondenza dei punti a, A.

(b) Se le due involuzioni sono in una stessa retta, i punti a, A si possono riferire ad una sola e medesima origine: cioè al punto O può sostituirsi o. In questo caso, si può anche domandare quante volte il punto a coincida con uno de' corrispondenti punti A. Eliminato ω dalle 1), 4) e posto oa in luogo di OA, si ha la:

$$5)\qquad (k_n . \overline{oa}^n + \ldots + k_0)(H_m . \overline{oa}^m + \ldots + H_0) - (h_n . \overline{oa}^n + \ldots + h_0)(K_m . \overline{oa}^m + \ldots + K_0) = 0,$$

equazione del grado $n + m$ rispetto ad oa. Dunque:

In una retta, nella quale sian date due involuzioni projettive, l' una di grado n, l' altra di grado m, esistono generalmente $n + m$ punti, ciascun de' quali considerato come appartenente alla prima involuzione, coincide con uno de' punti corrispondenti nella seconda.

Questi si chiameranno i *punti comuni* alle due involuzioni.

(c) Se l' equazione 1) contenesse nel suo primo membro il fattore $\overline{oa}^r$, essa rappresenterebbe un' involuzione del grado n, i cui gruppi avrebbero r punti comuni, tutti riuniti in o; ossia essa rappresenterebbe sostanzialmente un' involuzione del grado $n - r$, a ciascun gruppo della quale è aggiunto r volte il punto o. In tal caso è manifesto che anche il primo membro dell' equazione 5) sarà divisibile per $\overline{oa}^r$: cioè gli $n + m$ punti *comuni* alle due involuzioni proposte saranno costituiti dal punto o preso r volte e dagli $m + n - r$ punti *comuni* alla seconda involuzione (di grado m) ed a quella di grado $n - r$, alla quale si riduce la prima, spogliandone i gruppi del punto o.

Se inoltre i gruppi della seconda involuzione contenessero s volte il punto o, questo figurerebbe $r + s$ volte fra i punti *comuni* alle due involuzioni.

(d) Se un gruppo della prima involuzione (per es. quello che si ha ponendo $\omega = 0$) contiene r volte uno stesso punto o, e se il corrispondente gruppo della seconda involuzione contiene s volte lo stesso punto o, ove sia $s > r$, è evidente che l' equazione 5) conterrà nel primo membro il fattore $\overline{oa}^r$, cioè il punto o terrà il posto di r punti *comuni* alle due involuzioni.

(e) È superfluo accennare che, per le rette concorrenti in uno stesso punto, si può stabilire una teoria dell' involuzione affatto analoga a quella suesposta pei punti di una retta.

25. Merita speciale studio l' involuzione di secondo grado o *quadratica*, per la quale, fatto $n = 2$ nella 1), si ha un' equazione della forma:

$$6) \qquad k_2 . \overline{oa}^2 + k_1 . oa + k_0 + \omega (h_2 . \overline{oa}^2 + h_1 . oa + h_0) = 0.$$

Qui ciascun gruppo è composto di due soli punti, i quali diconsi *coniugati*; e chiamasi *punto centrale* quello, il cui coniugato è a distanza infinita. Posta l' origine o de' segmenti nel punto centrale ed inoltre assunto il gruppo, al quale esso appartiene, come corrispondente ad $\omega = \infty$, dovrà essere $h_2 = h_0 = 0$. Pertanto, se a, a' sono due punti coniugati qualunque, l' equazione 6) dà:

$$oa . oa' = \frac{k_0}{k_2} = \text{cost.}$$

Confrontando questa equazione con quella che esprime la projettività di due punteggiate (9):

$$ia . j'a' = \text{cost.}$$

si vede che l' involuzione quadratica nasce da due punteggiate projettive, le quali vengano sovrapposte in modo da far coincidere i punti i, j' corrispondenti ai punti all' infinito. Altrimenti possiam dire che due punteggiate projettive sovrapposte formano un' involuzione (quadratica), quando un punto a, considerato come appartenente all' una o all' altra punteggiata, ha per corrispondente un solo e medesimo punto a'.

Da tale proprietà si conclude che nell' involuzione quadratica, il rapporto anarmonico di quattro punti è eguale a quello de' loro coniugati.

(a) Siano e, f i due punti doppi (22) dell' involuzione, determinati dall' eguaglianza $\overline{oe}^2 = \overline{of}^2 = \text{cost.}$; avremo:

$$(efaa') = (efa'a),$$

cioè il rapporto anarmonico $(efaa')$ è eguale al suo reciproco, epperò è $= -1$, non potendo mai il rapporto anarmonico di quattro punti *distinti* essere eguale all' unità positiva. Dunque: nell' involuzione quadratica, i due punti doppi e due punti coniugati qualunque formano un sistema armonico.

Ne segue che un' involuzione di secondo grado si può considerare come la serie delle infinite coppie di punti aa' che dividono armonicamente un dato segmento ef.

(b) Due involuzioni quadratiche situate in una stessa retta hanno un gruppo comune, cioè vi sono due punti a, a' tali, che il segmento aa' è diviso armonicamente sì dai punti doppi e, f della prima, che dai punti doppi g, h della seconda involuzione. Infatti: sia preso un punto qualunque m nella retta data; siano m' ed m_1, i coniugati di m nelle due involuzioni. Variando m, i punti m', m_1, generano due punteggiate projettive, i punti *comuni* delle quali costituiscono evidentemente il gruppo comune alle due involuzioni proposte.

È pure evidente che due involuzioni di grado eguale, ma superiore al secondo, situate in una stessa retta, non avranno in generale alcun gruppo comune.

26. La teoria dell' involuzione quadratica ci servirà nel risolvere il problema che segue.

Se $abcd$ sono quattro punti in linea retta, abbiamo denominati *fondamentali* (1) i tre rapporti anarmonici:

$$(abcd) = \lambda, \quad (acdb) = \frac{1}{1-\lambda}, \quad (adbc) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Se i primi due rapporti sono eguali fra loro, vale a dire, se:

$$7) \qquad \lambda = \frac{1}{1-\lambda} \qquad \text{ossia} \qquad \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

si ha anche:

$$\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

cioè tutti e tre i rapporti anarmonici fondamentali sono eguali fra loro.

Dati i punti abc in una retta, cerchiamo di determinare in questa un punto d, tale che sodisfaccia all' eguaglianza:

$$(abcd) = (acdb),$$

ossia:

$$(abcd) = (cabd).$$

Assunto ad arbitrio nella retta data un punto m, si determini un punto m' per modo che sia

$$(abcm) = (cabm').$$

Variando simultaneamente m, m' generano due punteggiate projettive, nelle quali ai punti a, b, c, m corrispondono ordinatamente c, a, b, m'. Se chiamansi d, e i punti *comuni* di queste punteggiate, si avrà:

$$(abcd) = (cabd), \quad (abce) = (cabe),$$

cioè il proposto problema è risoluto da ciascuno de' punti d, e.

Ora siano α, β, γ i tre punti della retta data, che rendono armonici i tre sistemi (b, c, a, α), (c, a, b, β), (a, b, c, γ); i due sistemi (a, b, c, γ), (a, c, b, β) saranno projettivi, e siccome al punto b, considerato come appartenente all' uno o all' altro sistema, corrisponde sempre c, così le tre coppie aa, bc, $\beta\gamma$ sono in involuzione, cioè a è un punto doppio dell' involuzione quadratica determinata dalle coppie bc, $\beta\gamma$. L' altro punto doppio della stessa involuzione è α, poichè il segmento bc è diviso armonicamente dai punti a, α. Dunque a, α dividono armonicamente non solo bc, ma anche $\beta\gamma$. Si ha perciò:

$$(bca\alpha) = (\beta\gamma a\alpha) = -1,$$

ossia i sistemi (b, c, a, α), (β, γ, α, a) sono projettivi: la qual cosa torna a dire che le coppie $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sono in involuzione (*).

Da un punto o preso ad arbitrio fuori della retta data imagininsi condotti i raggi $o(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma)$ e $o(d, e)$, i quali tutti si seghino con una trasversale parallela ad oc nei punti $a', \alpha', b', \beta', \infty, \gamma', d', e'$. Avremo:

$$\lambda = (acdb) = (a'\infty d'b') = \frac{a'd'}{a'b'},$$

onde la 7) diverrà:

$$8) \qquad \overline{a'd'}^2 - a'd' \,.\, a'b' + \overline{a'b'}^2 = 0.$$

Essendo $(abc\gamma) = -1$, si ha $(a'b'\infty\gamma') = -1$, cioè γ' è il punto medio del segmento $a'b'$. Quindi, per le identità: $a'd' = \gamma'd' - \gamma'a'$, $a'b' = -2\gamma'a'$, la 8) diviene:

$$9) \qquad \overline{\gamma'd'}^2 = \overline{\gamma'e'}^2 = 3\gamma'a' \,.\, \gamma'b',$$

donde si ricava che γ' è il punto medio del segmento $d'e'$, cioè si ha $(d'e'\infty\gamma') = -1$, epperò $(dec\gamma) = -1$. Similmente si dimostra essere $(deb\beta) = -1$, $(dea\alpha) = -1$; vale a dire d, e sono i punti doppi dell' involuzione ($a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$) (**).

Il rapporto anarmonico λ è dato dall' equazione 7), ossia è una radice cubica imaginaria di -1. Per conseguenza, i quattro punti ($abcd$) od ($abce$) non possono essere tutti reali. L' equazione 9) ha il secondo membro negativo o positivo, secondo che $a'b'$ siano punti reali o imaginari coniugati. Dunque, se i tre punti dati a, b, c sono tutti reali, i punti de sono imaginari coniugati; ma se due de' tre punti dati sono imaginari coniugati, i punti de sono reali.

L' equazione 8) poi mostra che, se $a'b' = 0$, anche $a'd' = a'e' = 0$; cioè, se due de' punti dati coincidono in un solo, in questo cadono riuniti anche i punti de.

27. Chiameremo *equianarmonico* un sistema di quattro punti, i cui rapporti anarmonici fondamentali siano eguali, ossia un sistema di quattro punti aventi per rapporti anarmonici le radici cubiche imaginarie di -1.

Quattro punti $m_1m_2m_3m_4$ in linea retta siano rappresentati (6) dall' equazione:

$$10) \qquad A \,.\, \overline{om}^4 + 4B \,.\, \overline{om}^3 + 6C \,.\, \overline{om}^2 + 4D \,.\, om + E = 0.$$

Se il sistema di questi quattro punti è equianarmonico, si avrà:

$$(m_1m_2m_3m_4) = (m_1m_3m_4m_2),$$

ovvero, sostituendo ai segmenti $m_1m_2, \ldots$ le differenze $om_2 - om_1, \ldots$:

$$(om_1 - om_2)(om_1 - om_3)(om_4 - om_2)(om_4 - om_3) + (om_2 - om_3)^2 (om_1 - om_4)^2 = 0.$$

(*) Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg 1847, p. 121.

(**) Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg 1856-57-60, p. 178.

Sviluppando le operazioni indicate, quest' equazione si manifesta simmetrica rispetto ai quattro segmenti *om*, onde si potrà esprimerla per mezzo dei soli coefficienti della 10). Ed invero, coll' aiuto delle note relazioni fra i coefficienti e le radici di un' equazione, si trova senza difficoltà:

$$AE - 4BD + 3C^2 = 0,$$

come condizione necessaria e sufficiente affinchè i quattro punti rappresentati dalla 10) formino un sistema equianarmonico (*).

Art. V. Definizioni relative alle linee piane.

28. Una linea piana può considerarsi generata dal movimento di un punto o dal movimento di una retta: nel primo caso, essa è il *luogo* di tutte le posizioni del punto mobile; nel secondo, essa è l' *inviluppo* delle posizioni della retta mobile (**).

Una retta, considerata come luogo de' punti situati in essa, è il più semplice esempio della *linea-luogo*.

Un punto, risguardato come inviluppo di tutte le rette incrociantisi in esso, è il caso più semplice della *linea-inviluppo*.

Un *luogo* dicesi *dell' ordine n*, se una retta qualunque lo incontra in n punti (reali, imaginari, distinti o coincidenti). Il luogo di primo ordine è la *retta*. Un sistema di n rette è un luogo dell' ordine n. Due luoghi, i cui ordini siano rispettivamente n, n' formano insieme un luogo dell' ordine $n+n'$.

Un luogo dell' ordine n non può, in virtù della sua definizione, essere incontrato da una retta in più di n punti. Dunque, se un tal luogo avesse con una retta più di n punti comuni, questa sarebbe parte di quello, cioè tutt' i punti della retta apparterebbero al luogo.

Una linea curva di dato ordine si dirà *semplice*, quando non sia composta di linee d' ordine inferiore.

Un *inviluppo* dicesi *della classe n*, se per un punto qualunque passano n posizioni della retta inviluppante, ossia n *rette tangenti* (reali, imaginarie, distinte o coincidenti). L' inviluppo di prima classe è il *punto*. Un sistema di n punti è un inviluppo della classe n. Due inviluppi, le cui classi siano n, n', costituiscono, presi insieme, un inviluppo della classe $n+n'$.

Se ad un inviluppo della classe n arrivano più di n tangenti da uno stesso punto, questo appartiene necessariamente a quell' inviluppo, cioè tutte le rette condotte pel punto sono tangenti dell' inviluppo medesimo.

Una curva-inviluppo di data classe si dirà *semplice*, quando non sia composta di inviluppi di classe minore.

29. Consideriamo una curva-luogo dell' ordine n. Se a è una posizione del punto generatore, ossia un punto della curva, la retta A che passa per a e per la successiva posizione del punto mobile è la *tangente* alla curva in quel punto. Cioè, la curva luogo delle posizioni di un punto mobile è anche

(*) Painvin, *Équation des rapports anharmoniques etc.* (Nouvelles Annales de Mathématiques, t. 19, Paris 1860, p. 412).

(**) Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn 1839, p. 200.

l' inviluppo delle rette congiungenti fra loro le successive posizioni del punto medesimo.

Nel punto di contatto a la curva ha colla tangente A due punti comuni (*contatto bipunto*); quindi le due linee avranno, in generale, altri $n-2$ punti d' intersecazione. Se due di questi $n-2$ punti coincidono in un solo b, la retta A sarà tangente alla curva anche in b. In tal caso, la retta A dicesi *tangente doppia*; a e b sono i due punti di contatto (*).

Invece, se una delle $n-2$ intersezioni s' avvicina infinitamente ad a, la retta A avrà ivi un *contatto tripunto* colla curva. In tal caso, la retta A dicesi *tangente stazionaria*, perchè, se indichiamo con a, a', a'' i tre punti infinitamente vicini che costituiscono il contatto, essa rappresenta due tangenti successive aa', $a'a''$; e può anche dirsi ch' essa sia una tangente doppia, i cui punti di contatto a, a' sono infinitamente vicini. Ovvero: se la curva si suppone generata dal movimento di una retta, quando questa arriva nella posizione A cessa di ruotare in un senso, si arresta e poi comincia a ruotare nel senso opposto. Il punto di contatto a della curva colla tangente stazionaria chiamasi *flesso*, perchè ivi la retta A tocca e sega la curva, onde questa passa dall' una all' altra banda della retta medesima.

30. Consideriamo ora una curva-inviluppo della classe m. Se A è una posizione della retta generatrice, cioè una tangente della curva, il punto a ove A è incontrata dalla tangente successiva, è il punto in cui la retta A tocca la curva. Quindi la curva inviluppo di una retta mobile è anche il luogo del punto comune a due successive posizioni della retta stessa.

Per un punto qualunque si possono condurre, in generale, m tangenti alla curva. Ma se si considera un punto a della curva, due di quelle m tangenti sono successive, cioè coincidono nella tangente A. Quindi per a passeranno, inoltre, $m-2$ rette tangenti alla curva in altri punti.

Se due di queste $m-2$ tangenti coincidono in una sola retta B, la curva ha in a due tangenti A, B, cioè passa due volte per a, formando ivi un nodo; le rette A e B toccano in a i due rami di curva che ivi s' incrociano. In questo caso, il punto a dicesi *punto doppio* (*).

Invece, se una delle $m-2$ tangenti coincide con A, questa retta rappresenta tre tangenti successive A, A', A'', ed il punto a può considerarsi come un punto doppio, le cui tangenti A, A' coincidano (cioè, il cui nodo sia ridotto ad un punto). Nel caso che si considera, il punto a dicesi *cuspide* o *regresso* o *punto stazionario*, perchè esso sappresenta l' intersezione della tangente A con A' e di A' con A''; ossia perchè, se s' imagina la curva generata da un punto mobile, quando questo arriva in a si arresta, rovescia la direzione del suo moto e quindi passa dalla parte opposta della tangente A (tangente cuspidale).

Dalle formole di Plücker, che saranno dimostrate in seguito (**XVI.**), si raccoglie che una curva-luogo di dato ordine non ha in generale punti

(*) I due punti di contatto possono essere imaginari senza che la retta A cessi d' essere reale e di possedere tutte le proprietà di una tangente doppia.

(**) Le due tangenti A, B ponno essere imaginarie, epperò imaginari anche i due rami della curva, rimanendo reale il punto d' incrociamento a. Questo è, in tal caso, un *punto isolato* e può considerarsi come un' ovale infinitesima o evanescente.

doppi nè cuspidi, bensì tangenti doppie e flessi; e che una curva-inviluppo di data classe è in generale priva di tangenti singolari, ma possiede invece punti doppi e punti stazionari.

Però, se la curva è di natura speciale, vi potranno anche essere punti o tangenti singolari di più elevata moltiplicità. Una tangente si dirà multipla secondo il numero r, ossia $(r)^{pla}$, quando tocchi la curva in r punti, i quali possono essere tutti distinti, o in parte o tutti coincidenti. Un punto si dirà $(r)^{plo}$, quando per esso la curva passi r volte, epperò ammetta ivi r tangenti tutte distinte, ovvero in parte o tutte sovrapposte.

31. Se una curva ha un punto $(r)^{plo}$ a, ogni retta condotta per a sega ivi r volte la curva, onde il punto a equivale ad r intersezioni della retta colla curva. Ma se la retta tocca uno de' rami della curva, passanti per a, essa avrà in comune con questa anche quel punto di esso ramo che è successivo ad a; cioè questo punto conta come $r+1$ intersezioni della curva colla tangente. Dunque, fra tutte le rette condotte per a ve ne sono al più r (le tangenti agli r rami) che segano ivi la curva in $r+1$ punti coincidenti; epperò, se vi fossero $r+1$ rette dotate di tale proprietà, questa competerebbe ad ogni altra retta condotta per a, cioè a sarebbe un punto multiplo secondo il numero $r+1$.

Analogamente: se una curva ha una tangente A multipla secondo r, questa conta per r tangenti condotte da un punto preso ad arbitrio in essa, ma conta per $r+1$ tangenti rispetto a ciascuno de' punti di contatto della curva con A. Cioè da ogni punto di A partono r tangenti coincidenti con A; e vi sono al più r punti in questa retta, da ciascun de' quali partono $r+1$ tangenti coincidenti colla retta stessa. Onde, se vi fosse un punto di più, dotato di tale proprietà, questa spetterebbe a tutt' i punti di A, e per conseguenza questa retta sarebbe una tangente multipla secondo $r+1$.

Da queste poche premesse segue che:

Se una linea dell' ordine n ha un punto $(n)^{plo}$ a, essa non è altro che il sistema di n rette concorrenti in a. Infatti, la retta che unisce a ad un altro punto qualunque del luogo ha, con questo, $n+1$ punti comuni, epperò fa parte del luogo medesimo.

Così, se un inviluppo della classe m ha una tangente $(m)^{pla}$, esso è il sistema di m punti situati sopra questa retta.

Una curva semplice dell' ordine n non può avere, oltre ad un punto $(n-1)^{plo}$ anche un punto doppio, perchè la retta che unisce questi due punti avrebbe $n+1$ intersezioni comuni colla curva. Analogamente, una curva semplice della classe m non può avere una tangente $(m-1)^{pla}$ ed inoltre un' altra tangente doppia, perchè esse rappresenterebbero $m+1$ tangenti concorrenti nel punto comune alle medesime.

Art. VI. Punti e tangenti comuni a due curve.

32. In quanti punti si segano due curve, gli ordini delle quali siano n, n'? Ammetto, come principio evidente, che il numero delle intersezioni dipenda unicamente dai numeri n, n', talchè rimanga invariato, sostituendo alle curve date altri luoghi dello stesso ordine. Se alla curva d' ordine n' si

sostituiscono n' rette, queste incontrano la curva d'ordine n in nn' punti: dunque: due curve, i cui ordini siano n, n', si segano in nn' punti (reali, imaginari, distinti o coincidenti).

Si dirà che due curve hanno un *contatto bipunto, tripunto, quadripunto, cinquipunto, sipunto*,... quando esse abbiano due, tre, quattro, cinque, sei,... punti consecutivi comuni, e per conseguenza anche due, tre, quattro, cinque, sei,... tangenti consecutive comuni.

Se per un punto a passano r rami di una curva ed r' di un'altra, quel punto dee considerarsi come intersezione di ciascun ramo della prima curva con ciascun ramo della seconda, epperò equivale ad rr' intersezioni sovrapposte. Se, inoltre, un ramo della prima curva ed un ramo della seconda hanno in a la tangente comune, essi avranno ivi due punti comuni, onde a equivarrà ad $rr'+1$ intersezioni. In generale, se in a le due curve hanno s tangenti comuni, a equivale ad $rr'+s$ punti comuni alle due curve.

Come caso speciale, quando le r tangenti della prima curva e le r' dell'altra, nel punto comune a, coincidono tutte insieme in una sola retta T, questa, supposto $r'<r$, rappresenta r' tangenti comuni, onde il numero delle intersezioni riunite in a sarà $r'(r+1)$. Ma questo numero può divenir più grande, ogniqualvolta la retta T abbia un contatto più intimo con alcuna delle linee proposte, cioè la incontri in più di $r+1$ od $r'+1$ punti riuniti in a. Per esempio, se in a la retta T avesse $2r$ punti comuni colla prima curva ed $r'+1$ colla seconda, il punto a equivarrebbe ad $r(r'+1)$ intersezioni delle due curve. Del che è facile persuadersi, assumendo un sistema di r curve K di second' ordine aventi un punto comune a ed ivi toccate da una stessa retta T; ed inoltre un'altra curva qualunque C dotata di r' rami passanti per a ed ivi aventi la comune tangente T. In tal caso il punto a rappresenta $r'+1$ intersezioni di C con ciascuna delle curve K; epperò equivale ad $r(r'+1)$ punti comuni a C ed al sistema completo delle curve K.

Analogamente si dimostra che due curve, le cui classi siano m, m', hanno mm' tangenti comuni. Ecc. (*).

ART. VII. Numero delle condizioni che determinano una curva di dato ordine o di data classe.

33. Se una curva dee passare per un dato punto a, ciò equivale manifestamente ad *una condizione*.

Per a conducasi una retta A; se la curva deve contenere anche il punto di A che è successivo ad a, cioè se la curva deve non solo passare per a, ma anche toccare ivi la retta A, ciò equivale a *due condizioni*.

Per a conducasi una seconda retta A_1; se oltre ai due punti consecutivi di A, la curva dovesse contenere anche quel punto di A_1 che è successivo

(*) Le proprietà delle curve di data classe si deducono dalle proprietà delle curve di dato ordine, e reciprocamente, mediante il *principio di dualità*, che noi consideriamo come *primitivo* ed *assoluto*, cioè indipendente da qualsivoglia teoria speciale di trasformazione di figure.

ad a, ciò equivarrebbe a tre condizioni. Ma in tal caso, due rette condotte per a segherebbero ivi due volte la curva, cioè a sarebbe un punto doppio per questa. Dunque, se la curva dee avere un punto doppio in a, ciò equivale a *tre condizioni*.

Se la curva deve avere in a un punto doppio (tre condizioni), una retta qualunque A condotta per a conterrà due punti di quella, coincidenti in a. Se la curva deve passare per un terzo punto successivo di A, cioè se questa retta dovrà avere in a tre punti comuni colla curva, ciò equivarrà ad una nuova condizione. Se lo stesso si esige per una seconda retta A_1 e per una terza A_2 (passanti per a), si avranno in tutto sei condizioni. Ma quando per a passino tre rette, ciascuna delle quali seghi ivi tre volte la curva, quello è un punto triplo (31); dunque, se la curva dee avere in a un punto triplo, ciò equivale a *sei condizioni*.

In generale: sia x_{r-1} il numero delle condizioni, perchè la curva abbia in a un punto $(r-1)^{plo}$. Ogni retta A condotta per a, avrà ivi $r-1$ punti comuni colla curva. Se questa dee contenere un altro punto successivo di A, cioè se la retta A deve in a avere r punti comuni colla curva, ciò equivale ad una nuova condizione. Se la stessa cosa si esige per altre $r-1$ rette passanti per a, si avranno in tutto $x_{r-1}+r$ condizioni. Ora, quando per a passano r rette, ciascuna avente ivi r punti comuni colla curva, a è un punto multiplo secondo r (31); dunque, se la curva deve avere in a un punto $(r)^{plo}$, ciò equivale ad un numero $x_r = x_{r-1}+r$ di condizioni; ossia $x_r = \dfrac{r(r+1)}{2}$.

34. Da quante condizioni è determinata una curva d'ordine n? Se la curva debba avere un dato punto a multiplo secondo n, ciò equivale (33) ad $\dfrac{n(n+1)}{2}$ condizioni. Ma una linea d'ordine n, dotata di un punto $(n)^{plo}$ a è il sistema di n rette concorrenti in a (31); e, affinchè queste siano pienamente individuate, basta che sia dato un altro punto per ciascuna di esse. Dunque:

Il numero delle condizioni che determinano una curva d'ordine n è $\dfrac{n(n+1)}{2}+n=\dfrac{n(n+3)}{2}$ (*).

Se sono date solamente $\dfrac{n(n+3)}{2}-1$ condizioni, vi saranno infinite curve d'ordine n che le potranno sodisfare, e fra esse ve ne saranno alcune (siane N il numero) che passeranno per un punto qualunque dato. L'intero sistema di quelle curve, in numero infinito, chiamasi serie d'ordine n e d'indice N (**).

Per esempio, le tangenti di una curva della classe m formano una serie d'ordine 1 e d'indice m.

(*) Così, una curva della classe m è determinata da $\dfrac{m(m+3)}{2}$ condizioni.

(**) Jonquières, *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de M. Liouville, avril 1861, p. 113).

In generale esiste sempre una linea che inviluppa una serie data, cioè che in ciascun de' suoi punti tocca una curva della serie. Tutta la serie si può concepire generata dal movimento continuo di una curva, che vada cambiando di forma e di posizione, in modo però da sodisfare alle condizioni proposte. I punti, in cui una curva della serie sega quella che le succede immediatamente, sono anche i punti di contatto fra la prima di queste curve e la linea inviluppo della serie.

35. Il teorema or ora dimostrato (34) ci mette in grado di stabilire quest' altro: che una curva *semplice* dell' ordine n non può avere più di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi (comprese le cuspidi). Infatti: se ne avesse uno di più, per questi $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ e per altri $n-3$ punti della stessa curva, in tutto $\frac{(n-2)(n-2+3)}{2}$ punti, si potrebbe far passare una curva dell' ordine $n-2$, la quale avrebbe in comune colla linea data $2\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right\}+n-3=n(n-2)+1$ intersezioni: il che è impossibile, se la curva data non è composta di linee d' ordine minore (*).

Art. VIII. Porismi di Chasles e teorema di Carnot.

36. Sia dato (fig. 6.ª) un triangolo ABC. Un punto qualunque a di BC è individuato dal rapporto $\frac{aC}{aB}$; e parimenti, un punto qualunque b di CA è individuato dal rapporto $\frac{bC}{bA}$. Tirate le rette Aa, Bb, queste s' incontrino in un punto m, che è, per conseguenza, determinato dai due rapporti $\frac{aC}{aB}$, $\frac{bC}{bA}$, i quali chiameremo *coordinate* del punto m. La retta Cm seghi AB in c: così si ottiene un terzo rapporto $\frac{cB}{cA}$. Fra i tre rapporti ha luogo una semplice relazione, poichè, in virtù del noto teorema di Ceva, si ha:

$$\frac{bC}{bA}:\frac{aC}{aB}=-\frac{cB}{cA}.$$

Quando il punto m è sopra una delle due rette CA, CB, una delle due

(*) Plücker, *loco citato*, p. 215.

coordinate è nulla. Se m è sopra AB, le due coordinate sono entrambe infinite, ma è finito il loro rapporto, che è espresso da $-\frac{cB}{cA}$.

Supponiamo che m si muova sopra una retta data: i punti a e b genereranno sopra CB e CA due punteggiate projettive, cioè ad ogni posizione del punto a corrisponderà una sola posizione di b e reciprocamente. Dunque, fra i rapporti $\frac{aC}{aB}$, $\frac{bC}{bA}$, che determinano i due punti a, b, avrà luogo una equazione di primo grado rispetto a ciascun d' essi. Siccome poi, nel punto in cui la retta data incontra AB, entrambi i rapporti $\frac{aC}{aB}$, $\frac{bC}{bA}$ diventano infiniti, così quell' equazione non può essere che della forma:

$$1) \qquad \lambda \cdot \frac{aC}{aB} + \mu \cdot \frac{bC}{bA} + \nu = 0.$$

Questa relazione fra le coordinate di un punto qualunque m di una retta data è ciò che si chiama *equazione della retta.*

Di quale forma sarà la relazione fra le coordinate di m, se questo punto si muove percorrendo una curva d' ordine n? Una retta qualunque, la cui equazione sia la 1), incontra la curva in n punti: quindi la relazione richiesta e l' equazione 1) dovranno essere simultaneamente sodisfatte da n coppie di valori delle coordinate $\frac{aC}{aB}$, $\frac{bC}{bA}$: la qual cosa esige necessariamente che la richiesta relazione sia del grado n rispetto alle coordinate del punto variabile, considerate insieme.

Dunque, se il punto m percorre una curva d' ordine n, fra le coordinate variabili di m avrà luogo una relazione costante della forma:

$$2) \qquad \alpha\left(\frac{aC}{aB}\right)^n + \left[\beta + \gamma\,\frac{bC}{bA}\right]\left(\frac{aC}{aB}\right)^{n-1} + \ldots + \pi\left(\frac{bC}{bA}\right)^n + \rho = 0\,,$$

la quale può dirsi l' *equazione* della curva luogo del punto mobile.

Reciprocamente: se il punto m varia per modo che fra le sue coordinate abbia luogo una relazione costante della forma 2), il luogo del punto m è una curva d' ordine n.

37. Consideriamo di nuovo un triangolo ABC; un punto a in BC, determinato dal rapporto $\frac{aB}{aC}$ ed un punto b in CA, determinato dal rapporto $\frac{bA}{bC}$, individuano una retta ab la quale è, per conseguenza, determinata dai due rapporti $\frac{aB}{aC}$, $\frac{bA}{bC}$. Questi due rapporti si chiameranno *coordinate* della

retta. La quale poi incontra AB in un terzo punto c, e così dà luogo ad un terzo rapporto $\frac{cB}{cA}$. In virtù del noto teorema di MENELAO, i tre rapporti sono connessi fra loro dalla relazione semplicissima:

$$\frac{aB}{aC} : \frac{bA}{bC} = \frac{cB}{cA}.$$

Quando la retta ab passa per l' uno o per l' altro de' punti A, B, una delle due coordinate è zero. Se poi la retta passa per C, entrambe le coordinate sono infinite, ma è finito il loro rapporto $\frac{cB}{cA}$.

Supponiamo che la retta ab varii girando intorno ad un punto dato. Allora i punti a, b genereranno due punteggiate projettive, epperò fra le due coordinate di ab avrà luogo una equazione di primo grado rispetto a ciascuna coordinata. E siccome, quando la retta mobile passa per C, entrambe le coordinate divengono infinite, così la forma dell' equazione sarà:

$$1)' \qquad \lambda \frac{aB}{aC} + \mu \frac{bA}{bC} + \nu = 0.$$

Questa relazione fra le coordinate di una retta mobile intorno ad un punto dato può chiamarsi l' *equazione del punto* (considerato come inviluppo della retta mobile).

Suppongasi ora che la retta ab varii inviluppando una curva della classe m; qual relazione avrà luogo fra le coordinate della retta variabile? Da un punto qualunque, l' equazione del quale sia la 1)', partono m tangenti della curva, cioè m posizioni della retta mobile. Dunque la relazione richiesta e l' equazione 1)' dovranno essere sodisfatte simultaneamente da m sistemi di valori delle coordinate. Onde s' inferisce che la relazione richiesta sarà del grado m rispetto alle coordinate considerate insieme.

Dunque: se una retta si muove inviluppando una curva della classe m, fra le coordinate variabili della retta avrà luogo una relazione costante della forma:

$$2)' \qquad \alpha \left(\frac{aB}{aC}\right)^m + \left[\beta + \gamma \frac{bA}{bC}\right] \left(\frac{aB}{aC}\right)^{m-1} + \ldots + \pi \left(\frac{bA}{bC}\right)^m + \rho = 0,$$

la quale può risguardarsi come l' *equazione* della curva inviluppata dalla retta mobile.

Viceversa: se una retta varia per modo che le sue coordinate sodisfacciano costantemente ad una relazione della forma 2)', l' inviluppo della retta sarà una curva della classe m.

I due importanti porismi dimostrati in questo numero e nel precedente sono dovuti al sig. CHASLES (*).

(* *Aperçu historique*, p. 280.

38. Riprendiamo l' equazione 2). Pei punti a, a',... in cui la curva da essa rappresentata sega la retta CB, la coordinata $\frac{bC}{bA}$ è nulla e l' altra coordinata si desumerà dall' equazione medesima, ove si faccia $\frac{bC}{bA} = 0$. Si avrà così:

$$\frac{aC}{aB} \cdot \frac{a'C}{a'B} \ldots\ldots = (-1)^n \frac{\rho}{\alpha}.$$

Analogamente, pei punti b, b',... in cui la curva sega CA si ottiene:

$$\frac{bC}{bA} \cdot \frac{b'C}{b'A} \ldots\ldots = (-1)^n \frac{\rho}{\pi}.$$

Divisa l' equazione 2) per $\left(\frac{aC}{aB}\right)^n$ e avuto riguardo al teorema di Ceva, si ha:

$$\alpha + \beta \cdot \frac{aB}{aC} - \gamma \frac{cB}{cA} \ldots + \pi \left(-\frac{cB}{cA}\right)^n + \rho \left(\frac{aB}{aC}\right)^n = 0,$$

dove facendo $\frac{aB}{aC} = 0$ si avranno i punti c, c',... comuni alla curva ed alla retta AB; dunque:

$$\frac{cB}{cA} \cdot \frac{c'B}{c'A} \ldots\ldots = \frac{\alpha}{\pi}.$$

Dai tre risultati così ottenuti si ricava:

$$3) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{a'B}{a'C} \ldots \times \frac{bC}{bA} \cdot \frac{b'C}{b'A} \ldots \times \frac{cA}{cB} \cdot \frac{c'A}{c'B} \ldots = 1,$$

e si ha così il celebre teorema di Carnot (*):

Se una curva dell' ordine n incontra i lati di un triangolo ABC ne' punti aa'... in BC, bb'... in CA, cc'... in AB, si ha la relazione 3).

Questo teorema si applica anche ad un poligono qualsivoglia.

39. Per $n = 1$ il teorema di Carnot rientra in quello di Menelao. Per $n = 2$, si ha una proprietà di *sei* punti d' una curva di second' ordine. E siccome una curva siffatta è determinata da *cinque* punti (34), così avrà luogo il teorema inverso:

(*) *Géométrie de position*, Paris 1803, p. 291.

Se nei lati BC, CA, AB di un triangolo esistono sei punti aa', bb', cc' tali che si abbia la relazione:

$$\frac{aB \cdot a'B \cdot bC \cdot b'C \cdot cA \cdot c'A}{aC \cdot a'C \cdot bA \cdot b'A \cdot cB \cdot c'B} = 1, \tag{4}$$

i sei punti $aa'bb'cc'$ sono in una curva di second' ordine.

Se i punti $a'b'c'$ coincidono rispettivamente con abc, cioè se la curva tocca i lati del triangolo in a, b, c, la precedente relazione diviene:

$$\frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = \pm 1.$$

De' due segni, nati dall' estrazione della radice quadrata, non può prendersi il positivo, poichè in tal caso, pel teorema di Menelao, i tre punti abc sarebbero in una retta: il che è impossibile, non potendo una curva di second' ordine essere incontrata da una retta in più che due punti. Preso adunque il segno negativo, si conclude, in virtù del teorema di Ceva, che le rette Aa, Bb, Cc concorrono in uno stesso punto. Cioè: se una curva di second' ordine è inscritta in un triangolo, le rette che ne uniscono i vertici ai punti di contatto de' lati opposti passano per uno stesso punto.

(a) Per $n = 3$, dal teorema di Carnot si ricava che, se i lati d' un triangolo ABC segano una curva del terz' ordine (o più brevemente *cubica*) in nove punti $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$, ha luogo la relazione segmentaria:

$$\frac{aB \cdot a'B \cdot a''B \cdot bC \cdot b'C \cdot b''C \cdot cA \cdot c'A \cdot c''A}{aC \cdot a'C \cdot a''C \cdot bA \cdot b'A \cdot b''A \cdot cB \cdot c'B \cdot c''B} = 1. \tag{5}$$

Se i sei punti $aa'bb'cc'$ sono in una curva di second' ordine, si avrà anche la relazione 4), per la quale dividendo la 5) si ottiene:

$$\frac{a''B \cdot b''C \cdot c''A}{a''C \cdot b''A \cdot c''B} = 1$$

cioè i punti $a''b''c''$ saranno in linea retta. E viceversa, se $a''b''c''$ sono in linea retta, gli altri sei punti sono in una curva di second' ordine.

(b) Quando il luogo di second' ordine $aa'bb'cc'$ riducasi al sistema di due rette coincidenti, si ha:

S e n e' p u n t i i n c u i u n a c u b i c a è s e g a t a d a u n a r e t t a d a t a s i c o n d u c o n o l e t a n g e n t i, q u e s t e v a n n o a d i n c o n t r a r e l a c u r v a i n t r e a l t r i p u n t i c h e g i a c c i o n o i n u n a s e c o n d a r e t t a (*).

(*) Vedi il trattato di Maclaurin sulle curve del 3.° ordine, tradotto da Jonquières: *Mélanges de géométrie pure*, Paris 1856, p. 223.

Se una retta tocca una cubica in un punto a e la sega semplicemente in a'', questo secondo punto dicesi *tangenziale* del primo. Onde possiamo dire che, se tre punti di una cubica sono in una retta R, i loro tangenziali giacciono in una seconda retta S.

La retta S dicesi *retta satellite* di R (*retta primaria*), ed il punto comune alle R, S si chiama *punto satellite* di R.

Se R è tangente alla cubica, il punto satellite coincide col tangenziale del punto di contatto, e la retta satellite è la tangente alla cubica nel punto satellite.

(c) Supponendo che la retta $a''b''c''$ divenga una tangente stazionaria della cubica, si ha:

Se da un flesso di una cubica si conducono tre trasversali arbitrarie, queste la segano di nuovo in sei punti situati in una curva di second' ordine.

Dunque, se di questi sei punti, tre sono in linea retta, gli altri tre saranno in una seconda retta, epperò:

Se da un flesso si conducono tre tangenti ad una cubica, i tre punti di contatto sono in linea retta (*).

(d) Supposti i punti $a''b''c''$ in linea retta, gli altri sei $aa'bb'cc'$ sono in una curva di second' ordine; onde, se tre di questi, $a'b'c'$, coincidono, si avrà:

Se tre trasversali condotte da un punto a' di una cubica tagliano questa in tre punti $a''b''c''$ situati in linea retta ed in altri tre punti abc, la cubica avrà in a' un contatto tripunto con una curva di second' ordine passante per abc.

Se $a''b''c''$ coincidono in un flesso, dal teorema precedente si ricava:

Ogni trasversale condotta per un flesso di una cubica sega questa in due punti, ne' quali la curva data ha due contatti tripunti con una stessa curva di second' ordine (**).

E per conseguenza:

Se da un flesso di una cubica si conduce una retta a toccarla in un altro punto, in questo la cubica ha un contatto sipunto con una curva di second' ordine (***).

40. Consideriamo una curva-inviluppo della classe m, rappresentata dall' equazione 2)'. Per ottenere le tangenti di questa curva, passanti per A, dobbiamo fare ivi $\frac{bA}{bC}=0$; l' equazione risultante darà i valori dell' altra coordinata relativi ai punti a, a' ... in cui il lato BC è incontrato dalle tangenti passanti per A. Avremo così:

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{a'B}{a'C}\cdot\ldots\ldots=(-1)^m\frac{\rho}{\alpha}.$$

(*) Maclaurin, *l. c.* p. 226.

(**) Poncelet, *Analyse des transversales* (Giornale di Crelle, t. 8, Berlino 1832, p. 129-135).

(***) Plücker, *Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung* (Giornale di Crelle, t. 34, Berlino 1847, p. 330).

Analogamente, pei punti b, b' ... in cui il lato CA è incontrato dalle tangenti passanti per B, avremo:

$$\frac{bA}{bC} \cdot \frac{b'A}{b'C} \cdot \ldots\ldots = (-1)^m \frac{\rho}{\pi}.$$

Dividasi ora l' equazione 2)' per $\left(\frac{bA}{bC}\right)^m$; avuto riguardo alla relazione:

$$\frac{aB}{aC} : \frac{bA}{bC} = \frac{cB}{cA},$$

si otterrà:

$$\alpha\left(\frac{cB}{cA}\right)^m + \beta\left(\frac{cB}{cA}\right)^{m-1} \cdot \frac{bC}{bA} + \gamma\left(\frac{cB}{cA}\right)^{m-1} + \ldots + \pi + \rho\left(\frac{bC}{bA}\right)^m = 0.$$

Se in questa equazione si fa $\frac{bC}{bA} = 0$, si avranno i punti c, c' ... in cui AB è incontrata dalle tangenti che passano per C. Quindi:

$$\frac{cB}{cA} \cdot \frac{c'B}{c'A} \cdot \ldots\ldots = (-1)^m \frac{\pi}{\alpha}.$$

I tre risultati così ottenuti danno:

$$3)' \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{a'B}{a'C} \cdots \times \frac{bC}{bA} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdots \times \frac{cA}{cB} \cdot \frac{c'A}{c'B} \cdots = (-1)^m.$$

Si ha dunque il teorema (*):

Se dai vertici di un triangolo ABC si conducono le tangenti ad una curva della classe m, le quali incontrino i lati opposti ne' punti aa'....., bb'....., cc'....., fra i segmenti determinati da questi punti sui lati si ha la relazione 3)'.

Per $m = 1$ si ricade nel teorema di Ceva. Per $m = 2$ si ha una proprietà relativa a sei tangenti di una curva di seconda classe; e se ne deduce il teorema che, se una tal curva è circoscritta ad un triangolo, le tangenti nei vertici incontrano i lati opposti in tre punti situati sopra una stessa retta. Ecc. ecc.

41. Si rappresentino con $U = 0$, $U' = 0$ due equazioni analoghe alla 2), relative a due curve d' ordine n. Indicando con λ una quantità arbitraria,

---

(*) Chasles, *Géométrie supérieure*, Paris 1852, p. 361.

l' equazione $U + \lambda U' = 0$ rappresenterà evidentemente un' altra curva d' ordine n. I valori delle coordinate $\frac{aC}{aB}$, $\frac{bC}{bA}$, che annullano U ed U', annullano anche $U + \lambda U'$; dunque le n^2 intersezioni delle due curve rappresentate da $U = 0$, $U' = 0$ appartengono *tutte* alla curva rappresentata da $U + \lambda U' = 0$ (*). Siccome poi quest' ultima equazione rappresenta una curva dell' ordine n per *ciascuno* degli infiniti valori che si possono attribuire a λ, così abbiamo il teorema:

Per le n^2 intersezioni di due curve dell' ordine n passano infinite altre curve dello stesso ordine.

Altrove (34) si è dimostrato che una curva d' ordine n è determinata da $\frac{n(n+3)}{2}$ condizioni. Dal teorema precedente segue che per $\frac{n(n+3)}{2}$ punti passa, in generale, *una sola* curva d' ordine n: poichè, se per quei punti passassero due curve di quest' ordine, in virtù di quel teorema, se ne potrebbero tracciare infinite altre.

Per $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punti dati (34) passano infinite curve d' ordine n, due delle quali si segheranno in altri $n^2 - \left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti; questi apparterranno dunque anche a tutte le altre curve descritte pei punti dati. Ossia:

Per $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punti dati ad arbitrio passano infinite curve d' ordine n, le quali, oltre i dati, hanno in comune altri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti determinati (**).

Una qualunque di tali curve è individuata da un punto arbitrario, aggiunto ai dati $\frac{n(n+3)}{2} - 1$; cioè fra le infinite curve passanti per $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punti dati, ve n' ha una sola che passi per un altro punto preso ad arbitrio. Ne segue che l' *indice* della serie formata da quelle infinite curve (34) è 1. Ad una serie siffatta si dà il nome di *fascio*; ossia per *fascio* d' ordine n s' intende il sistema delle infinite curve di quest' ordine, che passano per $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punti dati ad arbitrio e, per conseguenza, per altri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti individuati. Il complesso delle n^2 intersezioni comuni alle curve d' un fascio dicesi *base* del fascio.

(*) Lamé, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, Paris 1818, p. 28.

(**) Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, 1. Bd, Essen 1828, p. 229.

Analoghe proprietà hanno luogo per le curve di data classe. Le m^2 tangenti comuni a due curve di classe m toccano infinite altre curve della stessa classe. Vi ha una sola curva di classe m che tocchi $\frac{m(m+3)}{2}$ rette date ad arbitrio. Tutte le curve di classe m tangenti ad $\frac{m(m+3)}{2}-1$ rette arbitrarie hanno altre $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ tangenti comuni individuate.

Art. IX. Altri teoremi fondamentali sulle curve piane.

42. Fra gli $\frac{n(n+3)}{2}$ punti, che determinano una curva semplice d'ordine n, ve ne possono essere tutt' al più $np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ situati in una curva d' ordine $p<n$. Infatti, se $np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1$ punti giacessero in una curva d' ordine p, i rimanenti punti, il cui numero è $\frac{n(n+3)}{2}-np+\frac{(p-1)(p-2)}{2}-1=\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$, determinerebbero (34) una curva d'ordine $n-p$, la quale insieme colla data curva d'ordine p costituirebbe un luogo d' ordine n passante per tutt' i punti dati. Dunque il massimo numero di punti che si possono prendere *ad arbitrio* sopra una curva d' ordine p, all' intento di descrivere per essi una curva *semplice* d'ordine $n>p$, è $np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ (*).

43. Siano date due curve, l' una d' ordine p, l' altra d' ordine q, e sia $p+q=n$. Se nel luogo d'ordine n, formato da queste due curve, si prendono ad arbitrio $\frac{n(n+3)}{2}-1$ punti, per essi passeranno infinite curve d' ordine n, le quali avranno in comune altre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ intersezioni (41), distribuite sulle due curve date. Nell' assumere ad arbitrio quegli $\frac{n(n+3)}{2}-1$ punti, se ne prendano $np-g$ sulla curva d' ordine p ed $nq-h$ sulla curva d' ordine q, ove g, h sono due numeri (interi e positivi) soggetti alla condizione:

$$g+h=\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{1}$$

(*) JACOBI, *De relationibus, quæ locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum etc.* (Giornale di CRELLE, t. 15, Berlino 1836, p. 292).

Inoltre, affinchè le due curve siano determinate dai punti presi in esse, dovrà essere:

$$np - g \overline{\gtrless} \frac{p(p+3)}{2}, \qquad nq - h \overline{\gtrless} \frac{q(q+3)}{2},$$

da cui:

$$g \overline{\lessgtr} \frac{p(p-3)}{2} + pq, \qquad h \overline{\lessgtr} \frac{q(q-3)}{2} + pq.$$

Se in queste due relazioni poniamo per g e per h i valori dati dalla 1), abbiamo:

$$h \overline{\gtrless} \frac{(q-1)(q-2)}{2}; \quad g \overline{\gtrless} \frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

Così sono fissati i limiti entro i quali devono essere compresi g, h. Possiamo dire che g è compreso fra il limite minimo $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ ed il limite massimo $\frac{(p-1)(p-2)}{2} + p(n-p) - 1$; e che h è dato, mediante g, dalla 1).

Abbiamo così il teorema (*):

Tutte le curve d' ordine $n = p + q$, descritte per $np - g$ punti dati di una curva d' ordine p e per $nq - h$ punti dati di una curva d' ordine q, segano la prima curva in altri g punti fissi e la seconda curva in altri h punti fissi.

(a) Da questo teorema segue immediatamente:

Affinchè per le n^2 intersezioni di due curve d' ordine n passi il sistema di due curve d' ordini p, $n-p$, è necessario e sufficiente che di queste intersezioni $np - g$ appartengano alla curva d' ordine p, ed $n(n-p) - h$ appartengano alla curva d' ordine $n - p$.

(b) Quando il numero g ha il suo minimo valore, il teorema suenunciato può esprimersi così:

Ogni curva d' ordine n, descritta per $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ punti dati di una curva d' ordine $p < n$, incontra questa in altri $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ punti fissi.

Ovvero:

Se delle n^2 intersezioni di due curve d' ordine n, $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ giacciono in una curva d' ordine $p < n$, questa ne conterrà altre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, e le rimanenti $n(n-p)$ saranno in una curva d' ordine $n - p$.

(*) Plücker, *Theorie der algeb. Curven*, p. 11.

Del resto, questi teoremi sono compresi nel seguente più generale.

44. Date due curve, l' una C_n d' ordine n, l' altra C_m d' ordine $m < n$, se delle loro intersezioni ve ne sono $mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ situate sopra una curva C_p d' ordine $p < n$, questa curva ne conterrà altre $\frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$; e le rimanenti $m(n-p)$ saranno sopra una curva d' ordine $n-p$.

Infatti: fra le $(n-m)p$ intersezioni delle curve C_p, C_n non comuni a C_m, se ne prendano $\frac{(n-m)(n-m+3)}{2}$ e per esse si descriva una curva C_{n-m} d' ordine $n-m$. Avremo così due luoghi d' ordine n: l' uno è C_n, l' altro è $C_m + C_{n-m}$. La curva C_p contiene

$$mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2} + \frac{(n-m)(n-m+3)}{2}$$

$= np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ intersezioni de' due luoghi, dunque (43, b) ne conterrà altre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$; cioè $\frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ comuni a C_n, C_m, e $(n-m)p - \frac{(n-m)(n-m+3)}{2}$ comuni a C_n, C_{n-m}; e tutte le rimanenti saranno in una curva d' ordine $n-p$.

Da questo teorema segue che gli $mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ punti dati comuni alle curve C_n, C_m, C_p individuano altri $\frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ punti comuni alle curve medesime. Tutti questi punti sono pienamente determinati dalle curve C_m, C_p, indipendentemente da C_n; dunque:

Qualunque curva d' ordine n descritta per $mp - \frac{(m+p-n-1)(m+p-n-2)}{2}$ intersezioni di due curve d' ordini m, p (m, p non maggiori di n) passa anche per tutti gli altri punti comuni a queste curve (*).

45. I teoremi or ora dimostrati sono della più alta importanza, a cagione del loro frequente uso nella teoria delle curve. Qui mi limiterò ad accennare qualche esempio interessante.

(a) Una curva d' ordine n sia segata da una trasversale ne' punti $a, b, \ldots$ e da una seconda trasversale ne' punti $a', b', \ldots$ Considerando il sistema delle n rette aa', bb', ... come un luogo d' ordine n, le rimanenti intersezioni di

(*) Cayley (Cambridge Mathematical Journal, vol. III, 1843, p. 211).

esse colla curva data saranno (43, b) in una curva d'ordine $n-2$. Supponiamo ora che a', b', . . . coincidano rispettivamente con a, b, . . .; avremo il teorema:

Se ne' punti, in cui una curva d'ordine n è segata da una retta, si conducono le tangenti alla curva, esse incontrano la curva medesima in altri $n(n-2)$ punti, situati sopra una curva d'ordine $n-2$ (*).

(b) Analogamente si dimostra il teorema generale:

Se ne' punti, in cui una curva d'ordine n è segata da un'altra curva d'ordine n', si conducono le tangenti alla prima curva, esse la segheranno in altri $nn'(n-2)$ punti, tutti situati in una curva dell'ordine $n'(n-2)$.

Questo teorema è un'immediata conseguenza della proprietà dimostrata al principio del n.° 44, purchè si consideri il complesso delle nn' tangenti come un luogo dell'ordine nn', e la curva d'ordine n', ripetuta due volte, come un luogo dell'ordine $2n'$.

(c) Una curva del terz' ordine passi pei vertici di un esagono e per due de' tre punti d'incontro delle tre coppie di lati opposti: dico che anche il punto comune alla terza coppia giace nella curva. Infatti: il primo, il terzo ed il quinto lato dell'esagono costituiscono un luogo di terz' ordine; mentre un altro luogo del medesimo ordine è formato dai tre lati di rango pari. Le nove intersezioni di questi due luoghi sono i sei vertici dell'esagono e i tre punti di concorso de' lati opposti. Ma otto di questi punti giacciono per ipotesi nella curva data; dunque (41) questa conterrà anche il nono (**); c. d. d.

Se i sei vertici sono in una curva di second' ordine, le altre tre intersezioni saranno in una retta (43, b); si ha così il celebre teorema di Pascal:

I lati opposti di un esagono inscritto in una curva di second' ordine si tagliano in tre punti situati in linea retta.

Dal quale, pel principio di dualità, si conclude il teorema di Brianchon:

Le rette congiungenti i vertici opposti di un esagono circoscritto ad una curva di seconda classe concorrono in uno stesso punto.

(d) Tornando all'esagono inscritto in una curva del terz' ordine, siano 123456 i vertici ed a, b, c i punti ove s'incontrano le coppie di lati opposti [12, 45], [23, 56], [34, 61]. Se i punti 12 sono infinitamente vicini nella curva e così pure 45, i punti 1, 3, 4, 6, b, c saranno i vertici di un quadrilatero completo ed a sarà l'incontro delle tangenti alla curva ne' punti 1 e 4; dunque:

Se un quadrilatero completo è inscritto in una curva del terz' ordine, le tangenti in due vertici opposti s'incontrano sulla curva (***).

Siano adunque $abca'b'c'$ i vertici di un quadrilatero completo inscritto in una curva del terz' ordine: abc siano in linea retta ed $a'b'c'$ i vertici rispettivamente opposti. Le tangenti in aa', bb', cc' incontreranno la curva in tre

(*) Poncelet, *Analyse des transversales*, p. 387.
(**) Poncelet, *Analyse des transversales*, p. 132.
(***) Maclaurin, *l. c.* p. 237.

punti α, β, γ. Siccome però, se tre punti abc di una curva del terz' ordine sono in una retta, anche i loro tangenziali $\alpha\beta\gamma$ sono in un' altra retta (39, b), così abbiamo il teorema:

Se un quadrilatero completo è inscritto in una curva del terz' ordine, le coppie di tangenti ne' vertici opposti concorrono in tre punti della curva, situati in linea retta.

Art. X. Generazione delle linee piane.

46. Abbiamo già detto altrove (41) chiamarsi *fascio* d' ordine n il sistema delle curve d' ordine n, in numero infinito, che passano per gli stessi n^2 punti: cioè un *fascio* è una forma geometrica, ogni elemento della quale è una curva d' ordine n passante per $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punti dati, epperò anche per altri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti fissi.

Ogni curva del fascio è completamente individuata da un punto preso ad arbitrio, pel quale essa debba passare. Se questo punto si prende in una retta passante per un punto della *base* ed infinitamente vicino a questo punto, la curva sarà individuata dalla sua tangente nel punto della base. Cioè, se per un punto della *base* del fascio si conduce una retta ad arbitrio, vi è una curva del fascio (ed una sola) che tocca quella retta in quel punto. Od anche: se consideriamo la stella formata da tutte le rette passanti pel *punto-base*, e assumiamo come *corrispondenti* una curva qualunque del fascio ed il raggio della stella che tocca la curva nel punto-base, potremo dire che ad ogni curva del fascio corrisponde un raggio della stella, e reciprocamente ad ogni raggio della stella corrisponde una curva del fascio: cioè la stella ed il fascio di curve sono due forme geometriche projettive.

Considerando due punti-base e le stelle di cui essi sono i centri, e riguardando come *corrispondenti* il raggio dell' una ed il raggio dell' altra stella, che toccano una stessa curva del fascio ne' punti-base, è manifesto che le due stelle sono projettive. Dunque le stelle, i cui centri sono gli n^2 punti-base, sono tutte projettive fra loro ed al fascio di curve.

Ciò premesso, per *rapporto anarmonico di quattro curve d' un fascio* intenderemo il rapporto anarmonico de' quattro corrispondenti raggi di una stella projettiva al fascio.

47. Se due punti-base sono infinitamente vicini, cioè se le curve del fascio si toccano fra loro in un punto a e sia A la tangente comune, tutte quelle curve avranno in a due punti consecutivi comuni colla retta A. Quindi, fra le curve medesime, se ne potrà determinare una che passi per un terzo punto successivo di A, cioè che abbia in a un contatto tripunto con A. E condotta per a una retta B ad arbitrio, si potrà anche determinare una curva del fascio che passi pel punto di B successivo ad a; la qual curva avrà per conseguenza due punti coincidenti in a, in comune con qualunque altra retta passante per a (31). Dunque: fra tutte le curve di un fascio, che si tocchino in un

punto a, ve n' ha una per la quale a è un flesso e ve n' ha un' altra per la quale a è un punto doppio.

48. Può accadere che un punto-base a sia un punto doppio per tutte le curve del fascio: nel qual caso, quel punto equivale a quattro intersezioni di due qualunque delle curve del fascio (32), epperò i rimanenti punti-base saranno $n^2 - 4$. Allora è manifesto che le coppie di tangenti alle singole curve nel loro punto doppio comune formano un' involuzione quadratica: questa ha due raggi doppi, epperò vi sono due curve nel fascio, per le quali a è una cuspide.

Se tutte le curve del fascio hanno, nel punto doppio a, una tangente comune, qualunque retta condotta per a e considerata come seconda tangente determina una curva del fascio. Dunque, in questo caso, vi sarà una sola curva per la quale a sia una cuspide.

Se tutte le curve del fascio hanno, nel punto doppio a, entrambe le tangenti A, A' comuni, potremo determinare una di quelle curve per modo che una retta passante per a e diversa da A, A', abbia ivi colla curva tre punti comuni. Dunque (31), nel caso che si considera, vi è una curva nel fascio, per la quale a è un punto triplo. Ciò vale anche quando le rette A, A' coincidano, cioè tutte le curve del fascio abbiano in a una cuspide, colla tangente comune.

Analogamente: se a è un punto $(r)^{plo}$ per tutte le curve del fascio, e se questi hanno ivi le r tangenti comuni, v' ha una curva del fascio, per la quale a è un punto multiplo secondo $r+1$.

49. Se le curve d' ordine n, di un dato fascio, sono segate da una trasversale arbitraria, le intersezioni di questa con ciascuna curva formano un gruppo di n punti; e gli infiniti gruppi analoghi, determinati dalle infinite curve del fascio, costituiscono un' involuzione di grado n. Infatti, per un punto qualunque i della trasversale passa *una sola* curva del fascio, la quale incontra la trasversale medesima negli altri $n-1$ punti del gruppo a cui appartiene i. Ciascun gruppo è dunque determinato da uno qualunque de' suoi punti: ciò che costituisce precisamente il carattere dell' involuzione (21).

L' involuzione di cui si tratta ha $2(n-1)$ punti doppi (22); dunque:

Fra le curve d' ordine n, d' un fascio, ve ne sono $2(n-1)$ che toccano una retta data.

È evidente che un fascio d' ordine n e l' involuzione di grado n, ch' esso determina sopra una data retta, sono due forme geometriche projettive: cioè il rapporto anarmonico di quattro curve del fascio ed il rapporto anarmonico de' quattro gruppi di punti, in cui esse segano la retta data, sono eguali.

Due fasci di curve si diranno *projettivi* quando siano rispettivamente projettivi a due stelle projettive fra loro; ossia quando le curve de' due fasci si corrispondano fra loro ad una ad una. Evidentemente i rapporti anarmonici di quattro curve dell' un fascio e delle quattro corrispondenti curve dell' altro sono eguali. E le involuzioni, che due fasci projettivi determinano su di una stessa trasversale o su di due trasversali distinte, sono projettive.

50. Siano dati due fasci projettivi, l' uno d' ordine n, l' altro d' ordine n'; di qual ordine è il luogo delle intersezioni di due curve corrispondenti? Con una trasversale arbitraria sego entrambi i fasci: ottengo così due involuzioni projettive, l' una di grado n, l' altra di grado n'. Queste involuzioni

hanno $n+n'$ punti comuni (24, b); cioè, nella trasversale vi sono $n+n'$ punti, per ciascuno de' quali passano due curve corrispondenti de' due fasci, epperò $n+n'$ punti del luogo richiesto. Questo luogo è dunque una curva $C_{n+n'}$ d' ordine $n+n'$ (*). Essa passa per tutt' i punti-base de' due fasci, poichè uno qualunque di questi punti giace su tutte le curve di un fascio e sopra una curva dell' altro (**).

(a) La curva risultante dell' ordine $n+n'$ può talvolta decomporsi in linee d' ordine inferiore. Ciò avviene, per esempio, quando le curve corrispondenti de' due fasci dati si incontrano costantemente sopra una curva d' ordine $r<n+n'$. Allora gli altri punti d' intersezione sono situati in una seconda curva dell' ordine $n+n'-r$, che insieme colla precedente costituisce il luogo completo d' ordine $n+n'$, generato dai due fasci.

(b) Questa decomposizione avviene anche quando i due fasci projettivi, supposti dello stesso ordine n, abbiano una curva comune e questa corrisponda a sè medesima. Allora ogni punto di questa curva può risguardarsi come comune a due curve corrispondenti; quindi il luogo delle intersezioni delle curve corrispondenti ne' due fasci sarà, in questo caso, una curva dell' ordine n.

A questa proprietà si può dare anche il seguente enunciato, nel quale tutte le curve nominate s' intendano dell' ordine n:

Se una curva H passa pei punti comuni a due curve U, V e pei punti comuni a due altre curve U', V', anche i punti comuni alle curve U, U', insieme coi punti comuni alle V, V', giaceranno tutti in una stessa curva K.

51. Segando, come dianzi, i due fasci dati con una trasversale R, si ottengono due involuzioni projettive, e gli $n+n'$ punti comuni ad esse sono le intersezioni di R colla curva $C_{n+n'}$ generata dalle intersezioni delle curve corrispondenti ne' due fasci. Supponiamo ora che nella retta R vi sia un tal punto o, nel quale coincidano r intersezioni di tutte le curve del primo fascio ed r' intersezioni di tutte quelle del secondo con R: ma una certa curva C_n del primo fascio abbia $r+s$ punti comuni con R riuniti in o, e questo punto rappresenti anche $r'+s'$ intersezioni di R colla curva $C_{n'}$ del secondo fascio, corrispondente a C_n. In virtù di proposizioni già esposte (24, c, d), in o coincideranno $r+r'+s$ od $r+r'+s'$ (secondo che $s<s'$ od $s>s'$) punti comuni alla retta R ed alla curva $C_{n+n'}$.

Questo teorema generale dà luogo a numerosi corollari; qui ci limitiamo ad esporre quelli, di cui avremo bisogno in seguito.

(a) Sia o un punto-base del primo fascio; $C_{n'}$ la curva del secondo, che passa per o; C_n la corrispondente curva del primo fascio, ed R la tangente a C_n in o. Applicando a questa retta il teorema generale, col porre $r=1$, $r'=0$, $s=1$, $s'=1$, troviamo che essa è anche la tangente a $C_{n+n'}$ in o.

(b) Le curve del primo fascio passino per o ed ivi abbiano una tangente comune; allora fra esse ve n' ha una C_n, che ha un punto doppio in o (47).

(*) Per questo metodo di determinare l' ordine di un luogo geometrico veggasi: PONCELET, *Analyse des transversales*, p. 29.

(**) CHASLES, *Construction de la courbe du 3. ordre etc.* (Comptes rendus, 30 mai 1853). — *Sur les courbes du 4. et du 3. ordre etc.* (Comptes rendus, 16 aout 1853).
JONQUIÈRES, *Essai sur la génération des courbes etc.* Paris 1858, p. 6.

Se la corrispondente curva $C_{n'}$ del secondo fascio passa per o, il teorema generale applicato ad una retta *qualunque* condotta per o ($r = 1$, $r' = 0$, $s = 1$, $s' = 1$) mostra ch' essa incontra $C_{n+n'}$ in due punti riuniti in o; cioè questo punto è doppio per $C_{n+n'}$.

(c) Nella ipotesi (b), se $C_{n'}$ ha in o un punto multiplo e si applica il teorema generale ad una delle due tangenti in o a C_n ($r = 1$, $r' = 0$, $s = 2$, $s' > 1$), troviamo che questa retta ha tre punti comuni con $C_{n+n'}$, riuniti in o; dunque questa curva ha in comune con C_n non solo il punto doppio o, ma anche le relative tangenti.

(d) Fatta ancora l' ipotesi (b), se R, tangente comune alle curve del primo fascio in o, è anche una delle tangenti ai due rami di C_n ($r = 2$, $r' = 0$, $s = 1$, $s' = 1$), essa sarà tangente ad uno de' due rami di $C_{n+n'}$.

(e) E se, oltre a ciò, la seconda tangente di C_n in o tocca ivi anche $C_{n'}$, applicando a questa retta il teorema generale ($r = 1$, $r' = 0$, $s = 2$, $s' = 2$), troviamo ch' essa è la tangente del secondo ramo di $C_{n+n'}$. Donde segue che, se C_n ha in o le due tangenti coincidenti colla retta R, tangente comune alle curve del primo fascio, e se questa retta tocca nel medesimo punto anche $C_{n'}$, la curva $C_{n+n'}$ avrà in o una cuspide colla tangente R.

(f) Due curve corrispondenti C_n, $C_{n'}$ passino uno stesso numero i di volte per un punto o. Se R è una retta condotta ad arbitrio per o, si ricava dal teorema generale ($r = r' = 0$, $s = s' = i$) che in o coincidono i intersezioni di $C_{n+n'}$ con R, cioè o è un punto multiplo secondo i per la curva $C_{n+n'}$.

(g) Se C_n passa i volte e $C_{n'}$ un maggior numero i' di volte per o, questo punto è ancora multiplo secondo i per $C_{n+n'}$. Inoltre, se si considera una delle tangenti di C_n in o, il teorema generale ($r = r' = 0$, $s = i + 1$, $s' > i$) dà $i + 1$ intersezioni di questa retta con $C_{n+n'}$ riunite in o. Dunque le tangenti agli i rami di C_n toccano anche gli i rami di $C_{n+n'}$.

Nello stesso modo si potrebbe dimostrare anche quanto è esposto nel n° seguente.

52. Supponiamo ora che le basi de' due fasci abbiano un punto comune a, il quale sia multiplo secondo r per le curve del primo fascio e multiplo secondo r' per le curve del secondo. Ogni curva del primo fascio ha in a un gruppo di r tangenti: gli analoghi gruppi corrispondenti alle varie curve del fascio medesimo formano un' involuzione di grado r. Similmente avremo un' involuzione di grado r' formata dalle tangenti in a alle curve del secondo fascio. Le due involuzioni hanno $r + r'$ raggi comuni (24, b), ciascuno de' quali, toccando in a due curve corrispondenti de' due fasci, tocca ivi anche la curva $C_{n+n'}$. Laonde questa curva ha $r + r'$ rami passanti per a, e le tangenti a questi rami sono i raggi comuni alle due involuzioni.

(a) Da ciò segue che, se tutte le curve d' uno stesso fascio hanno alcuna tangente comune in a, questa è anche una tangente di $C_{n+n'}$. Supposto che tutte le r tangenti in a siano comuni alle curve del primo fascio, epperò siano tangenti anche alla curva d' ordine $n + n'$, le rimanenti r' tangenti di questa sono evidentemente le r' tangenti di quella curva $C_{n'}$ del secondo fascio, che corrisponde alla curva C_n del primo fascio, dotata di un punto multiplo secondo $r + 1$ in a (48).

53. L' importante teorema (50) conduce naturalmente a porre questa quistione:

Dati quanti punti sono necessari per determinare una curva dell' ordine $n+n'$, formare due fasci projettivi, l' uno dell' ordine n, l' altro dell' ordine n', i quali, colle mutue intersezioni delle curve corrispondenti, generino la curva richiesta.

Ove questo problema sia risoluto, ne conseguirà immediatamente che o g n i c u r v a d a t a d' o r d i n e $n+n'$ p u ò e s s e r e g e n e r a t a d a l l e m u t u e i n t e r s e z i o n i d e l l e c u r v e c o r r i s p o n d e n t i d i d u e f a s c i p r o j e t t i v i d e g l i o r d i n i n e d n'.

La soluzione di quel problema fondamentale dipende da alcuni teoremi dovuti ai signori Chasles e Jonquières, che ora ci proponiamo di esporre. I quali teoremi però risguardano soltanto le curve d' ordine $n+n'>2$, poichè, per quelle del second' ordine, basta la proposizione dimostrata al n.° 50, come si vedrà fra poco (59). Ci sia dunque lecito supporre $n+n'$ non minore di 3.

54. Sopra una curva $C_{n+n'}$ d' ordine $n+n'$ si suppongano presi n^2 punti formanti la base d' un fascio d' ordine n, e ritengasi in primo luogo $n>n'$. Siano C_n, C'_n due curve di questo fascio. Siccome delle $n(n+n')$ intersezioni delle curve $C_{n+n'}$, C_n ve ne sono n^2 situate in C'_n, così (44) le altre nn' saranno sopra una curva $C_{n'}$ d' ordine n', la quale è determinata, perchè, essendo $n>n'$, si ha $n \overline{\gtrless} \frac{n'+3}{2}$, epperò $nn' \overline{\gtrless} \frac{n'(n'+3)}{2}$ (*). Analogamente: siccome delle $n(n+n')$ intersezioni di $C_{n+n'}$, C'_n ve ne sono n^2 sopra C_n, così le altre nn' saranno in una curva $C'_{n'}$ d' ordine n'.

I due luoghi d' ordine $n+n'$, $C_n+C'_{n'}$ e $C'_n+C_{n'}$ si segano in $(n+n')^2$ punti, de' quali $n^2+2nn'=n(n+2n')$ sono situati in $C_{n+n'}$. Quindi, siccome $n(n+2n') \overline{\gtrless} \frac{(n+n')(n+n'+3)}{2}-1$ (**), così (41) anche le altre n'^2 intersezioni di que' due luoghi, ossia gli n'^2 punti comuni a $C_{n'}$, $C'_{n'}$, giacciono in $C_{n+n'}$ e formano la base d' un fascio d' ordine n'. Così abbiamo sopra $C_{n+n'}$ due sistemi di punti: l' uno di n^2 punti, base d' un fascio d' ordine n; l' altro di n'^2 punti, base d' un secondo fascio d' ordine n'. Ogni curva C_n del primo fascio sega $C_{n+n'}$ in altri nn' punti, che determinano una curva $C_{n'}$ del secondo fascio; e viceversa, questa curva determina la prima. Dunque i due fasci sono projettivi e le intersezioni delle curve corrispondenti C_n, $C_{n'}$ sono tutte situate sopra $C_{n+n'}$.

(*) Per $n=2$, $n'=1$, si ha $n=\frac{n'+3}{2}$; in ogni altro caso è $n>\frac{n'+3}{2}$.

(**) Se $n=2$, $n'=1$, si ha $n(n+2n')=\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2}-1$. Per $n \overline{\gtrless} 3$ si ha $n(n+2n')=\frac{(n+n')^2+n(n+n')+n'(n-n')}{2}$ $>\frac{(n+n')^2+3(n+n')-2}{2}$.

(a) In secondo luogo, si supponga $n \gtreqless n'$. Ogni curva C_n, condotta per gli n^2 punti di $C_{n+n'}$, sega questa curva in altri nn' punti, i quali, in questo caso, non sono indipendenti fra loro, perchè ogni curva d' ordine n' condotta per $nn' - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ di questi punti passa anche per tutti gli altri (41, 42). Dunque, assumendo ad arbitrio altri

$$\frac{n'(n'+3)}{2} - \left\{nn' - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right\} = \frac{(n'-n+1)(n'-n+2)}{2} \text{ punti,}$$

tutti questi $\frac{n'(n'+3)+(n-1)(n-2)}{2}$ punti giaceranno in una curva $C_{n'}$ d' ordine n'. Quei punti addizionali siano presi sulla curva data $C_{n+n'}$.

Analogamente: un' altra curva C'_n del fascio d' ordine n, sega $C_{n+n'}$ in nn' punti (oltre gli n^2 punti-base) e questi insieme agli $\frac{(n'-n+1)(n'-n+2)}{2}$ punti addizionali suddetti determineranno una curva $C'_{n'}$ d' ordine n'.

I due luoghi d' ordine $n+n'$, $C_n + C'_{n'}$ e $C'_n + C_{n'}$ hanno in comune $(n+n')^2$ punti, de' quali $n^2 + 2nn' + \frac{(n'-n+1)(n'-n+2)}{2}$ sono in $C_{n+n'}$. Ma questo numero è eguale a $\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2} - 1 + (n-1)(n-2)$, epperò $\gtreqless \frac{(n+n')(n+n'+3)}{2} - 1$; dunque (41), le rimanenti $n'^2 - \frac{(n'-n+1)(n'-n+2)}{2}$ intersezioni di $C_{n'}$, $C'_{n'}$ sono anch' esse in $C_{n+n'}$, ed insieme ai punti addizionali costituiscono la base d' un fascio d' ordine n'. Così, anche in questo caso, abbiamo in $C_{n+n'}$ due sistemi di punti, costituenti le basi di due fasci, degli ordini n, n'. I due fasci sono projettivi, perchè ogni curva dell' uno determina una curva dell' altro e reciprocamente. Inoltre le curve corrispondenti si segano costantemente in punti appartenenti alla data $C_{n+n'}$ (*).

(b) Questo teorema mostra in qual modo, data una curva d' ordine $n+n'$ ed in essa i punti-base d' un fascio d' ordine n, si possano determinare i punti-base d' un secondo fascio d' ordine n', projettivo al primo, talmente che i due fasci, colle intersezioni delle curve corrispondenti, generino la curva data. Rimane a scoprire come si determinino, sopra una curva data d' ordine $n+n'$, gli n^2 punti-base d' un fascio di curve d' ordine n.

55. In primo luogo osserviamo che dal teorema di Cayley (44) si ricava:

Se una curva d' ordine $n+n'$ contiene $n^2 - \frac{(n-n'-1)(n-n'-2)}{2}$

(*) Chasles, *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres* (Comptes rendus, 28 décembre 1857).

intersezioni di due curve d' ordine n, essa contiene anche tutte le altre. Ossia:

Quando $n^2 - \frac{(n-n'-1)(n-n'-2)}{2}$ punti-base d' un fascio d' ordine n giacciono in una curva d' ordine $n+n'$, questa contiene anche tutti gli altri.

Il qual teorema suppone manifestamente $n - n' - 2 > 0$ ossia $n > n' + 2$. Sia dunque $n > n' + 2$ e supponiamo che sopra una data curva d' ordine $n + n'$ si vogliano prendere n^2 punti costituenti la base d' un fascio d' ordine n. Affinchè la curva data contenga gli n^2 punti-base, basta che ne contenga $n^2 - \frac{(n-n'-1)(n-n'-2)}{2}$, cioè devono essere sodisfatte altrettante condizioni.

Ora, astraendo dalla curva data, gli n^2 punti-base sono determinati da $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ fra essi, e siccome per determinare un punto sono necessarie due condizioni, così per determinare tutta la base del fascio abbisognerebbero $n(n+3) - 2$ condizioni. Ma volendo soltanto che i punti-base siano nella curva data, non si hanno da sodisfare che $n^2 - \frac{(n-n'-1)(n-n'-2)}{2}$ condizioni; quindi rimarranno $n(n+3) - 2 - n^2 + \frac{(n-n'-1)(n-n'-2)}{2}$ $= \frac{(n-n')^2 + 3(n+n') - 2}{2}$ condizioni libere, cioè d' altrettanti elementi si può disporre ad arbitrio. Siccome un punto che debba giacere sopra una data curva è determinato da una sola condizione, così potremo prendere, ad arbitrio, nella curva data $\frac{(n-n')^2 + 3(n+n') - 2}{2}$ punti, per formare la base del fascio d' ordine n.

Nell' altro caso poi, in cui sia $n \overline{\gtrless} n' + 2$, perchè gli n^2 punti-base siano nella curva data, occorrono n^2 condizioni; quindi, ragionando come dianzi, rimarranno $n(n+3) - 2 - n^2 = 3n - 2$ condizioni libere. Dunque:

Quando in una curva data d' ordine $n+n'$ si vogliono determinare n^2 punti costituenti la base d' un fascio d' ordine n, si possono prendere ad arbitrio nella curva $\frac{(n-n')^2 + 3(n+n') - 2}{2}$, ovvero $3n-2$ punti, secondo che sia $n > n' + 2$, ovvero $n \overline{\gtrless} n' + 2$ (*).

Dai due teoremi ora dimostrati (54, 55) risulta che una curva qualun-

---

*) Chasles, *Détermination du nombre de points qu' on peut prendre etc.* (Comptes rendus, 21 septembre 1857.

que d' ordine m, può essere generata, in infinite maniere diverse, mediante due fasci projettivi, i cui ordini n, n' diano una somma $n+n'=m$.

56. Trovato così il numero de' punti che si possono prendere ad arbitrio sopra una data curva d' ordine m, per costituire la base d' un fascio d' ordine $n<m$, rimane determinato anche il numero de' punti che non sono arbitrari, ma che è d' uopo individuare, per rendere complete le basi de' due fasci generatori. Ed invero: se il numero m è diviso in due parti n, n', queste o saranno disuguali, o uguali. Siano dapprima disuguali, ed n la maggiore.

Se $n>n'+2$, il numero de' punti arbitrari è $\dfrac{(n-n')^2+3(n+n')-2}{2}$.

Ma le basi de' due fasci sono rispettivamente determinate da $\dfrac{n(n+3)}{2}-1$ e da $\dfrac{n'(n'+3)}{2}-1$ punti: dunque il numero de' punti incogniti è

$$\frac{n(n+3)+n'(n'+3)}{2}-2-\frac{(n-n')^2+3(n+n')-2}{2}=nn'-1.$$

Se $n=n'+2$, ovvero $n=n'+1$, il numero de' punti arbitrari è $3n-2$, quindi i punti incogniti saranno

$$\frac{n(n+3)+n'(n'+3)}{2}-2-(3n-2)=nn'-1.$$

Quando n ed n' siano uguali, il numero de' punti arbitrari, che si possono prendere nel formare la base del primo fascio, è $3n-2$; ma, determinata questa base, si può ancora prendere un punto (addizionale) ad arbitrio nel formare la base del secondo fascio: come risulta dal n.° 54, nel quale il numero de' punti addizionali arbitrari $\dfrac{(n'-n+1)(n'-n+2)}{2}$ per $n=n'$ diviene appunto $=1$. Dunque il numero de' punti incogniti è

$$\frac{n(n+3)+n'(n'+3)}{2}-2-(3n-2)-1=nn'-1.$$

Allo stesso risultato si arriva anche partendo da quello de' due numeri n, n', che si suppone minore. Sia $n<n'$. Allora, nel formare la base del fascio d' ordine n si ponno prendere $3n-2$ punti arbitrari; fissata questa base, si possono ancora prendere $\dfrac{(n'-n+1)(n'-n+2)}{2}$ punti arbitrari nella base del secondo fascio; quindi i punti incogniti nelle due basi sono in numero $\dfrac{n(n+3)+n'(n'+3)}{2}-2-(3n-2)-\dfrac{(n'-n+1)(n'-n+2)}{2}$ $=nn'-1$.

Concludiamo adunque che, nel formare le basi de' due fasci d' ordini n, n', generatori d' una curva d' ordine $n+n'$, v' ha sempre un numero $nn'-1$ di punti che non sono arbitrari, ma che bisogna determinare mediante gli elementi che individuano la curva.

57. Siano dati $\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2}$ punti, pei quali si vuol far passare una curva d'ordine $n+n'$: cioè si vogliano determinare due fasci d'ordini n, n', projettivi, in modo che il luogo delle intersezioni delle curve corrispondenti sia la curva d'ordine $n+n'$ determinata dai punti dati.

Siccome fra gli $\frac{n(n+3)+n'(n'+3)}{2}-2$ punti, che individuano le basi de' due fasci, ve ne sono $nn'-1$ che non si ponno prendere ad arbitrio, così non si potranno far entrare nelle due basi che
$\frac{n(n+3)+n'(n'+3)}{2}-2-(nn'-1)$ punti, scelti ad arbitrio fra i dati. Di questi rimangono così $2nn'+1$ liberi. Affinchè la curva richiesta passi anche per essi, le curve del primo fascio condotte rispettivamente per quei $2nn'+1$ punti dovranno corrispondere projettivamente alle curve del secondo fascio condotte per gli stessi punti. E siccome nello stabilire la projettività di due forme si possono assumere ad arbitrio tre coppie di elementi corrispondenti (8), dopo di che, ad ogni quarto elemento della prima forma corrisponde un quarto elemento della seconda, determinato dall' eguaglianza de' rapporti anarmonici; così la corrispondenza projettiva di quelle $2nn'+1$ coppie di curve somministrerà $(2nn'+1)-3=2(nn'-1)$ condizioni: il qual numero è appunto necessario e sufficiente per determinare gli $nn'-1$ punti incogniti (*).

58. Il problema suenunciato (53) ammette differenti soluzioni, non solo a cagione della molteplice divisibilità del numero esprimente l'ordine della curva domandata in due parti n, n', ma anche pei diversi modi con cui si potranno distribuire fra le basi de' due fasci generatori i punti che si assumono ad arbitrio (e quindi anche i punti incogniti).

Da ciò che si è detto al n.° 56 risulta che:

Quando vogliónsi formare sopra una curva d'ordine $n+n'$ le basi di due fasci generatori d'ordini n, n', se n, n' sono disuguali, si potranno attribuire al solo fascio d'ordine superiore tutt' i punti che è lecito assumere ad arbitrio; e se $n=n'$, si possono attribuire ad uno de' fasci, al più, tutt' i punti arbitrari meno uno (**).

Art. XI. Costruzione delle curve di second' ordine.

59. Se nel teorema (50) si pone $n=n'=1$, si ha:

Date due stelle projettive, i cui centri siano i punti o, o', il luogo del punto d'intersezione di due raggi corrispondenti è una curva di second' ordine, passante pei punti o, o'.

Reciprocamente: siano o, o' due punti fissati ad arbitrio sopra una curva di second' ordine; m un punto variabile della medesima. Movendosi m sulla

(*) Jonquières, *Essai sur la génération des courbes etc.* p. 13—14

(**) Chasles, *Détermination du nombre de points etc.* c. s.

curva, i raggi om, $o'm$ generano due stelle projettive. Quando m è infinitamente vicino ad o, il raggio om diviene tangente alla curva in o; dunque la tangente in o è quel raggio della prima stella, che corrisponde alla retta $o'o$ considerata come appartenente alla seconda stella.

Da ciò scende immediata la costruzione della curva di second' ordine, della quale siano dati cinque punti $abcoo'$. Si assumano due di essi, oo', come centri di due stelle projettive, nelle quali $(oa, o'a)$, $(ob, o'b)$, $(oc, o'c)$ siano tre coppie di raggi corrispondenti. Qualunque altro punto della curva sarà l' intersezione di due raggi corrispondenti di queste stelle (3). Del resto, questa costruzione coincide con quella che si deduce dal teorema di Pascal (45, c). La qual costruzione si applica, senza modificazioni, anche al caso in cui due de' punti dati siano infinitamente vicini sopra una retta data, ossia in altre parole, al caso in cui la curva richiesta debba passare per quattro punti dati ed in uno di questi toccare una retta data; ecc.

Se nelle due stelle projettive, i cui centri sono o, o', la retta oo' corrisponde a sè medesima, ogni punto di essa è comune a due raggi corrispondenti (sovrapposti), epperò quella retta è parte del luogo di second' ordine generato dalle due stelle projettive. Dunque questo luogo è composto della oo' e di un' altra retta, la quale conterrà le intersezioni de' raggi corrispondenti delle due stelle (50, b).

60. Date due punteggiate projettive A, A', di qual classe è la curva inviluppata dalla retta che unisce due punti corrispondenti? ossia, quante di tali rette passano per un punto arbitrario o? Consideriamo le due stelle che si ottengono unendo o ai punti della retta A ed ai corrispondenti punti di A': tali stelle sono projettive alle due punteggiate, epperò projettive tra loro. Ogni retta che unisca due punti corrispondenti di A, A' e passi per o, è evidentemente un *raggio comune* delle due stelle, cioè un raggio che coincide col proprio corrispondente. Ma due stelle projettive concentriche hanno due raggi comuni (10); dunque per o passano due rette, ciascuna delle quali è una tangente dell' inviluppo di cui si tratta. Per conseguenza quest' inviluppo è di seconda classe.

Il punto comune alle due rette date si chiami p o q', secondo che si consideri come appartenente alla prima o alla seconda punteggiata; e siano p', q i punti corrispondenti a p, q'. Le rette pp' (A') e qq' (A) saranno tangenti alla curva di seconda classe; dunque questa è tangente alle rette date.

Reciprocamente: due tangenti fisse qualunque A, A' di una curva di seconda classe sono incontrate da una tangente variabile M della stessa curva in punti a, a' che formano due punteggiate projettive. Quando M è prossima a confondersi con A, a è il punto in cui A tocca la curva; dunque A tocca la curva nel punto q corrispondente al punto q' di A', ove questa retta è segata da A.

Di qui si deduce la costruzione, per tangenti, della curva di seconda classe determinata da cinque tangenti. Due di queste sono incontrate dalle altre tre in tre coppie di punti, i quali, assunti come corrispondenti, individuano due punteggiate projettive. Qualunque altra tangente della curva richiesta sarà determinata da due punti corrispondenti di queste punteggiate.

Se nelle due rette punteggiate projettive A, A', il punto di segamento delle due rette corrisponde a sè medesimo, ogni retta condotta per esso unisce

due punti corrispondenti (coincidenti); laonde quel punto è parte dell' inviluppo di seconda classe generato dalle due punteggiate. Cioè quest' inviluppo sarà composto del detto punto e di un secondo punto, pel quale passeranno tutte le rette congiungenti due punti corrispondenti delle punteggiate date (3).

61. Da un punto qualunque di una curva di seconda classe non può condursi alcuna retta a toccare *altrove* la curva (30), cioè una retta che tocchi la curva in un punto non può incontrarla in alcun altro punto. Dunque una curva di seconda classe è anche di second' ordine.

Analogamente si dimostra che una curva di second' ordine è anche di seconda classe. V' ha dunque identità fra le curve di second' ordine e quelle di seconda classe: a patto però che si considerino *curve semplici*. Perchè il sistema di due rette è bensì un luogo di second' ordine, ma non già una linea di seconda classe; e così pure, il sistema di due punti è un inviluppo di seconda classe, senz' essere un luogo di second' ordine.

Le curve di second' ordine e seconda classe si designano ordinariamente col nome di *coniche*.

62. Dal teorema (59) risulta che, se $abcd$ sono quattro punti dati di una conica ed m un punto variabile della medesima, il rapporto anarmonico de' quattro raggi $m(a, b, c, d)$ è costante, epperò eguale a quello delle rette $a(a, b, c, d)$, ove aa esprime la retta che tocca la conica in a.

Reciprocamente: dati quattro punti $abcd$, il luogo di un punto m, tale che il rapporto anarmonico delle rette $m(a, b, c, d)$ abbia un valore dato λ, è una conica passante per $abcd$, la quale si costruisce assai facilmente. Infatti: se s' indica con aa una retta condotta per a e tale che il rapporto anarmonico delle quattro rette $a(a, b, c, d)$ sia eguale a λ, la conica richiesta sarà individuata dal dover passare per $abcd$ e toccare in a la retta aa.

Il luogo geometrico qui considerato conduce alla soluzione del seguente problema:

Date cinque rette $o'(a', b', c', d', e')$ concorrenti in un punto o' e dati cinque punti $abcde$, trovare un punto o tale che il fascio di cinque rette $o(a, b, c, d, e)$ sia projettivo al fascio analogo $o'(a', b', c', d', e')$.

S' imagini la conica luogo di un punto m tale che i due fasci $m(a, b, c, d)$, $o'(a', b', c', d')$ abbiano lo stesso rapporto anarmonico. E similmente si imagini la conica luogo di un punto n tale che i due fasci $n(a, b, c, e)$, $o'(a', b', c', e')$ abbiano lo stesso rapporto anarmonico. La prima conica passa pei punti $abcd$; la seconda per $abce$; entrambe poi sono pienamente individuate.

Ora, siccome il richiesto punto o dee possedere sì la proprietà del punto m che quella del punto n, così esso sarà situato in entrambe le coniche. Queste hanno tre punti comuni abc dati a priori; dunque la quarta loro intersezione sarà il punto domandato. Questo punto si costruisce senza previamente descrivere le due curve; come si mostrerà qui appresso.

63. Le coniche passanti per gli stessi quattro punti $abco$ formano un fascio di second' ordine. Fra quelle coniche ve ne sono tre, ciascuna delle quali è il sistema di due rette: esse sono le tre coppie de' lati opposti (bc, ao), (ca, bo), (ab, co) del quadrangolo completo a cui sono circoscritte tutte le coniche proposte.

Se per un vertice del quadrangolo, ex. gr. per a, si conduce un' arbi-

traria trasversale A, essa sega ciascuna conica del fascio in un punto. Viceversa ogni punto della trasversale individua una conica del fascio, che viene ad essere determinata dal detto punto e dai quattro dati *abco*. Dunque il fascio di coniche e la punteggiata ch' esse segnano sulla trasversale A sono due forme geometriche projettive: in altre parole, il rapporto anarmonico de' quattro punti in cui quattro *date* coniche del fascio segano una trasversale condotta per un punto-base è *costante*, qualunque sia la direzione della trasversale e qualunque sia il punto-base; ed invero quel rapporto anarmonico è eguale a quello delle quattro coniche (46).

Segue da ciò, che due trasversali A, B condotte ad arbitrio per due punti-base a, b rispettivamente, incontreranno le coniche del fascio in punti formanti due punteggiate projettive: purchè si assumano come corrispondenti que' punti m, m' ove una stessa conica è incontrata dalle due trasversali. Si osservi inoltre che in queste due punteggiate il punto d' incontro delle due trasversali corrisponde a sè stesso, perchè la conica del fascio determinata da quel punto incontra ivi entrambe le trasversali. Per conseguenza, ogni retta mm' che unisca due punti corrispondenti delle punteggiate passa per un punto fisso i (3, 60). Ogni retta condotta per i segherà le due trasversali A, B in due punti situati in una stessa conica del fascio. Dunque: la retta *co* (che insieme ad *ab* costituisce una conica del fascio) passa per i; il punto in cui A sega *bc* ed il punto in cui B sega *ao* sono in linea retta con i; e così pure, il punto in cui A sega *bo* ed il punto in cui B sega *ac* sono in una retta passante per i.

64. Suppongasi ora che una conica sia individuata da cinque punti dati *abcdf*; ed una seconda conica sia individuata dai punti pur dati *abce'f'*. Le due coniche hanno tre punti comuni a, b, c dati *a priori*; si vuol costruire il quarto punto comune o, senza descrivere attualmente le coniche.

Si conducano le rette *ad*, *be'* e si chiamino rispettivamente A, B. La retta A incontrerà la seconda conica in un punto e che, in virtù del teorema di Pascal, si sa costruire senza delineare la curva. Così la retta B incontrerà la prima conica in un punto d'. Le rette *dd'*, *ee'* concorrano in un punto i. Sia m il punto comune alle rette A e *bc*; ed m' quello ove si segano B ed *im*. Il punto o comune alle *am'* ed *ic* sarà il richiesto. Questa costruzione è pienamente giustificata dalle cose esposte nel numero precedente (*).

Art. XII. Costruzione della curva di terz' ordine determinata da nove punti.

65. Il teorema generale (50) per $n = 2$, $n' = 1$, suona così:

Dato un fascio di coniche, projettivo ad una stella data, il luogo de' punti in cui i raggi della stella segano le

(*) Veggasi anche: Schroter, *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova*, Vratislaviæ 1862, p. 13.

corrispondenti coniche è una curva di terz' ordine (o *cubica*) passante pei quattro punti comuni alle coniche e pel centro della stella.

Se o è il centro della stella, la tangente in o alla cubica è il raggio corrispondente a quella conica (del fascio) che passa per o.

Se a è uno de' punti-base del fascio di coniche, la tangente in a alla cubica è la retta che nel punto medesimo tocca la conica corrispondente al raggio oa (51, a).

I teoremi inversi del precedente si ricavano da quello del n.° 54:

1.° Fissati ad arbitrio in una cubica quattro punti $abcd$, ogni conica descritta per essi sega la cubica in due punti mm'; la retta mm' passa per un punto fisso o della cubica medesima. Le coniche per $abcd$ e le rette per o formano due fasci projettivi. Il punto o dicesi *opposto* ai quattro punti $abcd$.

2.° Fissati ad arbitrio in una cubica tre punti abc ed un altro punto o, ogni retta condotta per o sega la curva in due punti mm'; la conica descritta per $abcmm'$ passa per un altro punto fisso d della cubica. Le coniche per $abcd$ e le rette per o si corrispondono projettivamente.

66. Siano ora dati nove punti $abcdefghi$ e si voglia costruire la curva di terz' ordine da essi determinata, mediante due fasci projettivi, l' uno di coniche, l' altro di rette. Per formare le basi de' due fasci sono necessari cinque punti: ma uno fra essi (57) non può essere assunto ad arbitrio fra i punti dati, bensì solamente gli altri quattro.

Secondo che il punto incognito si attribuisce al fascio di rette o al fascio di coniche, si hanno due diversi modi di costruire la curva di terz' ordine, i quali corrispondono ai due teoremi (65, 1.°, 2.°). Noi qui ci limitiamo al solo primo modo di costruzione, che è dovuto al sig. Chasles (*).

Imaginiamo le cinque coniche circoscritte al quadrangolo $abcd$ e passanti rispettivamente per e, f, g, h, i. Il sistema di queste cinque coniche si può rappresentare col simbolo:

$$(abcd)(e, f, g, h, i).$$

Si tratta dunque di trovare un punto o tale che il sistema di cinque rette

$$o(e, f, g, h, i)$$

sia projettivo al sistema delle cinque coniche. Siccome quest' ultimo sistema è projettivo a quello delle tangenti alle coniche nel punto a (46), così l' attuale problema coincide con uno già risoluto (62, 64). Determinato il punto o opposto ai quattro $abcd$, sono determinati i fasci generatori; e con ciò la quistione è risoluta.

67. Suppongansi ora due cubiche individuate da due sistemi di nove punti, fra i quali ve ne siano quattro $abcd$ comuni alle due curve. Queste si seghe-

---

(*) *Construction de la courbe du 3. ordre déterminée par neuf points* (Comptes rendus, 30 mai 1853).

Per altre costruzioni delle cubiche e delle curve d' ordine superiore veggansi le eccellenti Memorie: Jonquières, *Essai sur la génération des courbes géométriques etc.* — Hærtenberger, *Ueber die Erzeugung geometrischer Curven* (Giornale Crelle-Borchardt, t. 58, Berlino 1860, p. 51).

ranno in altri cinque punti che individuano una conica. Questa conica può essere costruita senza conoscere quei cinque punti, cioè senza descrivere le due cubiche.

Si consideri il fascio delle coniche circoscritte al quadrangolo *abcd*; una qualunque di esse sega la prima cubica in due punti *mn* e la seconda cubica in due altri punti *m'n'*. Le rette *mn*, *m'n'* incontrano nuovamente le cubiche in due punti fissi *o*, *o'* che sono gli *opposti* ai dati *abcd*, rispetto alle due cubiche medesime. Variando la conica, le rette *omn*, *o'm'n'* generano due stelle projettive al fascio di coniche, epperò projettive fra loro. I raggi corrispondenti di queste stelle si segano in punti il cui luogo è una conica passante per *o*, *o'* ed anche pei cinque punti incogniti comuni alle due cubiche. Essa è dunque la conica domandata.

(a) Di questa conica si conoscono già due punti *o*, *o'*; altri tre si possono dedurre dalle tre coppie di lati opposti del quadrangolo *abcd*, considerate come coniche speciali del fascio. Infatti: siano *m*, *n* i punti in cui la prima cubica è incontrata nuovamente dalle rette *bc*, *ad*; ed *m'*, *n'* quelli in cui queste medesime rette segano la seconda cubica. Le rette *mn*, *m'n'* sono due raggi corrispondenti delle due stelle projettive, i cui centri sono *o*, *o'*: dunque il loro punto comune appartiene alla conica richiesta. Analogamente dicasi delle altre due coppie di lati opposti (*ca*, *bd*), (*ab*, *cd*).

Di qui segue che, de' nove punti comuni a due cubiche, cinque qualunque individuano una conica la quale passa pel punto opposto agli altri quattro, rispetto a ciascuna delle cubiche (*).

(b) Siano *abcd*, *a'b'c'd'* otto punti comuni a due cubiche; *o*, *o'* i punti opposti ai due sistemi *abcd*, *a'b'c'd'*, rispetto alla prima cubica. La retta *oo'* sega questa cubica in un terzo punto *x*. Dalla definizione del *punto opposto* segue che le coniche individuate dai due sistemi *abcdo'*, *a'b'c'd'o* passano entrambe per *x*. Dunque *x* è il nono punto comune alle due cubiche (**).

(c) Se *abcd* sono quattro punti di una cubica, il loro punto *opposto o* può essere determinato così. Siano *m*, *n* i punti in cui la curva è incontrata dalle rette *ab*, *cd*; la retta *mn* segherà la curva medesima in *o*. Se i punti *abcd* coincidono in un solo *a*, anche *m*, *n* coincidono nel punto *m* in cui la cubica è segata dalla tangente in *a*; ed *o* diviene l'intersezione della curva colla tangente in *m*. Dunque, se (39, b) *m* si chiama il *tangenziale* di *a* ed *o* il tangenziale di *m* ossia il *secondo tangenziale* di *a*, si avrà:

Se una conica ha un contatto quadripunto con una cubica, la retta che unisce gli altri due punti di segamento passa pel secondo tangenziale del punto di contatto.

Da ciò segue immediatamente che:

La conica avente un contatto cinquipunto con una cubica incontra questa sulla retta congiungente il punto di contatto al suo secondo tangenziale (***).

(*) Plücker, *Theorie der algeb. Curven*, p. 56.

(**) Hart, *Construction by the ruler alone to determine the ninth point of intersection of two curves of the third degree* (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 6, Cambridge 1851, p. 181).

(***) Poncelet, *Analyse des transversales*, p. 135.

(d) Dai teoremi (b) e (c) si raccoglie che, se due cubiche hanno fra loro due contatti quadripunti ne' punti a, a', il nono punto di intersezione x è in linea retta coi secondi tangenziali o, o' de' punti di contatto a, a'. Se a, a' coincidono, anche o' coincide con o ed x è il suo tangenziale, cioè il terzo tangenziale di a; dunque:

Tutte le cubiche aventi un contatto ottipunto con una data cubica in un medesimo punto, passano pel terzo tangenziale del punto di contatto (*).

(e) Il teorema (45, b) applicato ad una curva del terz' ordine suona così:

Se una cubica è segata da una curva dell' ordine n in $3n$ punti, i tangenziali di questi giacciono tutti in un' altra curva dell' ordine n.

Donde segue immediatamente (44):

Le coniche aventi un contatto cinquipunto con una data cubica ne' punti in cui questa è segata da una curva dell' ordine n, segano la cubica medesima in $3n$ punti situati in un' altra curva dell' ordine n.

Ed anche:

Se una conica ha un contatto cinquipunto con una cubica in a e la sega in b, e se a', b' sono i tangenziali di a, b, un' altra conica avrà colla cubica un contatto cinquipunto in a' e la segherà in b'.

(*) SALMON. *On curves of the third order* (Philosophical Transactions of the Royal Society vol. 118, part 2, London 1859, p. 535).

SEZIONE II.

TEORIA DELLE CURVE POLARI.

Art. XIII. Definizione e proprietà fondamentali delle curve polari.

68. Sia data una linea piana C_n dell' ordine n, e sia o un punto fissato ad arbitrio nel suo piano. Se intorno ad o si fa girare una trasversale che in una posizione qualunque seghi C_n in n punti $a_1 a_2 \ldots a_n$, il luogo de' centri armonici, di grado r, del sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto al polo o (11) sarà una curva dell' ordine r, perchè essa ha r punti sopra ogni trasversale condotta per o. Tale curva si dirà *polare* $(n-r)^{esima}$ del punto o rispetto alla curva data (*curva fondamentale*) (*).

Così il punto o dà origine ad $n-1$ curve polari relative alla linea data. La *prima polare* è una curva d' ordine $n-1$; la *seconda polare* è dell' ordine $n-2$; ecc. L' *ultima* od $(n-1)^{ma}$ polare, cioè il luogo dei centri armonici di primo grado, è una retta (**).

69. I teoremi altrove dimostrati (**III**), pei centri armonici di un sistema di n punti in linea retta, si traducono qui in altrettante proprietà delle curve polari relative alla curva data.

(a) Il teorema (12) può essere espresso così: se m è un punto della polare $(n-r)^{ma}$ di o, viceversa o è un punto della polare $(r)^{ma}$ di m (***).

Ossia:

Il luogo di un polo, la cui polare $(r)^{ma}$ passi per un dato punto o, è la polare $(n-r)^{ma}$ di o.

Per esempio: la prima polare di o è il luogo de' poli le rette polari de' quali passano per o; la seconda polare di o è il luogo de' poli le cui coniche polari passano per questo punto; ecc.

(b) Dal teorema (13) segue immediatamente che:

Un polo qualsivoglia o ha la stessa polare $(s)^{ma}$ rispetto alla data linea C_n e rispetto ad ogni curva polare d' ordine più alto, dello stesso punto o, considerata come curva fondamentale.

Dunque: la seconda polare di o rispetto a C_n è la prima polare di o relativa alla prima polare del punto stesso presa rispetto a C_n; la terza polare

---

(*) Grassmann, *Theorie der Centralen* (Giornale di Crelle, t. 24, Berlino 1842, p. 262).

(**) Il teorema relativo ai centri armonici di primo grado è di Cotes; vedi Maclaurin, *l. c.* p. 205.

(***) Bobillier, *Théorèmes sur les polaires successives* (Annales de Gergonne, t. 19, Nismes 1828-29, p. 305).

è la prima polare relativa alla seconda polare ed anche la seconda polare relativa alla prima polare; ecc.

(c) Il teorema (14) somministra il seguente:

La polare $(r')^{ma}$ di un punto o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di un altro punto o (relativa a C_n) coincide colla polare $(r)^{ma}$ di o rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di o' (relativa a C_n) (*).

Questo teorema è, come apparirà in seguito, fecondo di molte conseguenze. Ecco intanto una proprietà che emerge spontanea dal confrontarlo col teorema (69, a).

(d) Supponiamo che la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o passi per un punto m, ossia che la polare $(r)^{ma}$ di o rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di o' passi per m. Dal teorema (69, a) segue che la polare $\left((n-r')-r\right)^{ma}$ di m rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di o' passerà per o, ossia che la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $\left((n-r')-r\right)^{ma}$ di m passa per o. Dunque:

Se la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o passa per m, la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(n-r-r')^{ma}$ di m passa per o.

70. Tornando alla definizione (68), se il polo o è preso nella curva fondamentale, talchè esso tenga luogo di uno degli n punti $a_1 a_2 \ldots a_n$, il centro armonico di primo grado si confonderà con o. Ma se la trasversale è tangente alla curva in o, due de' punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ coincidono con o; onde, riuscendo indeterminato il centro armonico di primo grado, può assumersi come tale un punto qualunque della trasversale (17). Questa è dunque, nel caso attuale, il luogo de' centri armonici di primo grado; vale a dire: la retta polare di un punto della curva fondamentale è la tangente in questo punto.

Quando il polo non giaccia nella curva fondamentale, ma la trasversale le sia tangente, due de' punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ coincidono nel punto di contatto; epperò questo sarà (16) un centro armonico di grado $n-1$, ossia un punto della prima polare. Dunque: la prima polare di un punto qualunque sega la curva fondamentale ne' punti ove questa è toccata dalle rette tangenti che passano pel polo.

La prima polare è una curva dell' ordine $n-1$, talchè segherà C_n in $n(n-1)$ punti. Donde s' inferisce che da un punto qualunque si possono condurre $n(n-1)$ tangenti alla curva fondamentale (**), ossia:

Una curva dell' ordine n è, in generale, della classe $n(n-1)$.

71. Se il polo o è preso nella curva fondamentale, qualunque sia la trasversale condotta per o, una delle intersezioni $a_1 a_2 \ldots a_n$ coincide con o medesimo; onde (17) o sarà un centro armonico, di ciascun grado, del sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$ rispetto al polo o. E ciò torna a dire che tutte le polari di o dalla prima sino all' $(n-1)^{ma}$ passano per questo punto.

(*) Plücker, *Ueber ein neues Coordinatensystem* (Giornale di Crelle, t. 5, Berlino 1830, p. 34).

(**) Poncelet, *Solution .... suivie d'une théorie des polaires réciproques etc.* (Annales de Gergonne, t. 8, Nismes 1817-18, p. 214).

Ma v' ha di più. Se la trasversale è tangente a C_n in o, in questo sono riuniti due punti a, quindi anche (17) due centri armonici di grado qualunque; cioè la curva fondamentale è toccata in o da tutte le polari di questo punto.

Dallo stesso teorema (17) segue ancora che la prima polare di un punto o della curva fondamentale è il luogo de' centri armonici di grado $n-2$, relativi al polo o, del sistema di $n-1$ punti in cui C_n è incontrata da una trasversale variabile condotta per o. Gli $n(n-1)-2$ punti in cui la prima polare di o sega C_n (oltre ad o, ove queste curve si toccano) sono i punti di contatto delle rette che da o si possono condurre a toccare altrove la curva data.

72. Supponiamo che la curva C_n abbia un punto d multiplo secondo il numero r. Ogni retta condotta per d sega ivi la curva in r punti coincidenti, epperò (17) d sarà un punto $(r)^{plo}$ per ciascuna polare del punto stesso.

Ciascuna delle tangenti agli r rami di C_n incontra questa curva in $r+1$ punti coincidenti in d (31); onde considerando la tangente come una trasversale (68), in d coincidono $r+1$ punti a, epperò anche $r+1$ centri armonici di qualunque grado, rispetto al polo d (17). Dunque le r tangenti di C_n nel suo punto multiplo d toccano ivi anche gli r rami di qualunque curva polare di d.

Ne segue che le polari $(n-1)^{ma}$, $(n-2)^{ma}$, ... $(n-r+1)^{ma}$ del punto d sono indeterminate, e la polare $(n-r)^{ma}$ del punto stesso è il sistema delle r tangenti dianzi considerate (31).

Quest' ultima proprietà si rende evidente anche osservando che, risguardata la tangente in d ad un ramo di C_n come una trasversale condotta pel polo d (68), vi sono $r+1$ punti a coincidenti insieme col polo, onde qualunque punto della trasversale potrà essere assunto come centro armonico di grado r (17). Cioè il fascio delle tangenti agli r rami di C_n costituisce il luogo dei centri armonici di grado r, rispetto al polo d.

73. Sia o un polo dato ad arbitrio nel piano della curva C_n, dotata di un punto d multiplo secondo r. Condotta la trasversale od, r punti a coincideranno in d; quindi (16) questo medesimo punto terrà luogo di $r-s$ centri armonici del grado $n-s$ $(s<r)$; ossia:

Un punto $(r)^{plo}$ della curva fondamentale è multiplo secondo $r-s$ per la polare $(s)^{ma}$ di qualsivoglia polo.

(a) Applichiamo le cose premesse al caso che C_n sia il sistema di n rette concorrenti in uno stesso punto d. Questo, essendo un punto $(n)^{plo}$ pel luogo fondamentale, sarà multiplo secondo $n-1$ per la prima polare di un punto qualunque o; la quale sarà per conseguenza composta di $n-1$ rette incrociantisi in d.

Condotta pel polo o una trasversale qualunque che seghi le n rette date in $a_1 a_2 \ldots a_n$, se $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ sono i centri armonici di grado $n-1$, le rette $d(m_1, m_2, \ldots m_{n-1})$ costituiranno la prima polare di o (20). Questa prima polare non cambia (18), quando il polo o varii mantenendosi sopra una retta passante per d.

Se fra le n rette date ve ne sono s coincidenti in una sola da, nel punto a saranno riuniti (16) $s-1$ centri armonici di grado $n-1$, epperò $s-1$ rette dm coincideranno in da, qualunque sia o.

(b) Come caso particolare, per $n = 2$ si ha:

Se la linea fondamentale è un pajo di rette $d(a_1, a_2)$, la polare di un punto o è la retta coniugata armonica di do rispetto alle due date (*). E se queste coincidono, con esse si confonde anche la polare, qualunque sia il polo.

74. Ritorniamo ad una curva qualunque C_n dotata di un punto $(r)^{plo}$ d. Assunto un polo arbitrario o, la prima polare di questo passerà $r - 1$ volte per d (73); e le r rette tangenti a C_n in d costituiranno l' $(n - r)^{ma}$ polare del medesimo punto d (72). Analogamente le $r - 1$ tangenti in d alla prima polare di o formano l' $\left((n-1)-(r-1)\right)^{ma}$ polare di d rispetto alla prima polare di o, ossia, ciò che è lo stesso (69, c), la prima polare di o rispetto all' $(n - r)^{ma}$ polare di d. Dunque (73, a):

S e l a c u r v a f o n d a m e n t a l e h a u n p u n t o $(r)^{plo}$ d, l e t a n g e n t i i n d a l l a p r i m a p o l a r e d i u n p o l o q u a l u n q u e o s o n o l e $r - 1$ r e t t e, i l c u i s i s t e m a è l a p r i m a p o l a r e d i o r i s p e t t o a l f a s c i o d e l l e r t a n g e n t i a l l a c u r v a f o n d a m e n t a l e i n d.

(a) Di qui s' inferisce, in virtù del teorema (73, a), che le prime polari di tutt' i punti di una retta passante per d hanno in questo punto le stesse rette tangenti.

(b) Inoltre, se s tangenti di C_n nel punto multiplo d coincidono in una sola retta, in questa si riuniranno anche $s - 1$ tangenti della prima polare di o (73, a); onde, in tal caso, d rappresenta $r(r-1) + s - 1$ intersezioni di C_n colla medesima prima polare (32). Il numero delle intersezioni rimanenti è $n(n-1) - r(r-1) - (s-1)$; perciò questo numero esprime quante tangenti (70) si possono condurre dal punto o alla curva fondamentale (supposto però che questa non abbia altri punti multipli). In altre parole:

S e l a c u r v a f o n d a m e n t a l e h a u n p u n t o m u l t i p l o s e c o n d o r, c o n s t a n g e n t i s o v r a p p o s t e, l a c l a s s e d e l l a c u r v a è d i m i n u i t a d i $r(r-1) + s - 1$ u n i t à.

(c) Queste proprietà generali, nel caso $r = 2$, $s = 1$ e nel caso $r = 2$, $s = 2$, danno (73, b):

Se la curva fondamentale ha un punto doppio d, la prima polare di un polo qualunque o passa per d ed ivi è toccata dalla retta coniugata armonica di do rispetto alle due tangenti della curva fondamentale.

Se la curva fondamentale ha una cuspide d, la prima polare di un polo qualunque passa per d ed ivi ha per tangente la stessa retta che tocca la curva data.

Per conseguenza, la prima polare di o sega C_n in altri $n(n-1) - 2$ o $n(n-1) - 3$ punti (oltre d), secondo che d è un punto doppio ordinario o una cuspide. Cioè la classe di una curva s' abbassa di *due* unità per ogni punto doppio e di *tre* per ogni cuspide (**).

(*) A questa retta si dà il nome di *polare* del punto o rispetto all' angolo a_1da_2.

(**) Plücker, *Solution d' une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes* (Giornale di Crelle, t. 12, Berlino 1831, p. 107).

(d) Per r qualunque ed $s = 1$ si ha:

Se C_n ha r rami passanti per uno stesso punto con tangenti tutte distinte, la classe è diminuita di $r(r-1)$ unità; vale a dire, un punto $(r)^{plo}$ con r tangenti distinte produce lo stesso effetto, rispetto alla classe della curva, come $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi ordinari. La qual cosa è di un' evidenza intuitiva; perchè, se r rami s' incrociano in uno stesso punto, questo tien luogo degli $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi che nascono dall' intersecarsi di quei rami a due a due.

Ma se s rami hanno la tangente comune, combinando ciascun d' essi col successivo si hanno $s-1$ cuspidi, mentre ogni altra combinazione di due rami darà un punto doppio ordinario. Ossia: un punto $(r)^{plo}$ con s tangenti riunite produce, rispetto alla classe della curva, la stessa diminuzione che produrrebbero $\frac{r(r-1)}{2} - (s-1)$ punti doppi ordinari ed $s-1$ cuspidi.

75. Da un polo o condotte due trasversali a segare la curva fondamentale C_n rispettivamente in $a_1 a_2 \ldots a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n$, se α, β sono i centri armonici, di primo grado, di questi due sistemi di n punti rispetto ad o, la retta polare di o sarà $\alpha\beta$. Donde segue che, se pei medesimi punti $a_1 a_2 \ldots a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n$ passa una seconda linea C'_n dell' ordine n, la retta $\alpha\beta$ sarà la polare di o anche rispetto a C'_n. Imaginando ora che le due trasversali oa, ob siano infinitamente vicine, arriviamo al teorema:

Se due linee dell' ordine n si toccano in n punti situati in una stessa retta, un punto qualunque di questa ha la medesima retta polare rispetto ad entrambe le linee date (*).

La seconda linea può essere il sistema delle tangenti a C_n negli n punti $a_1 a_2 \ldots a_n$; dunque:

Un polo, che sia in linea retta con n punti di una curva dell' ordine n, ha la stessa retta polare rispetto alla curva e rispetto alle tangenti di questa negli n punti.

Ciò torna a dire che, se una trasversale tirata ad arbitrio pel polo o incontra la curva in $c_1 c_2 \ldots c_n$ e le n tangenti in $t_1 t_2 \ldots t_n$, si avrà (11):

$$\frac{1}{oc_1} + \frac{1}{oc_2} \ldots + \frac{1}{oc_n} = \frac{1}{ot_1} + \frac{1}{ot_2} \ldots + \frac{1}{ot_n} \quad (**).$$

76. Sian date n rette $A_1 A_2 \ldots A_n$ situate comunque nel piano, ed un polo o; sia P_r la retta polare di o rispetto al sistema delle $n-1$ rette

---

(*) Salmon, *A treatise on the higher plane curves*, Dublin 1852, p. 54.
(**) Maclaurin, *l. c.* p. 201.

$A_1 A_2 \ldots A_{r-1} A_{r+1} \ldots A_n$ considerato come luogo d' ordine $n-1$; e sia a_r il punto in cui P_r incontra A_r. In virtù del teorema (15), a_r è anche il centro armonico di primo grado, rispetto al polo o, del sistema di n punti in cui le n rette date sono tagliate dalla trasversale oa_r; dunque:

Date n rette ed un polo o, il punto, in cui una qualunque delle rette date incontra la retta polare di o rispetto alle altre $n-1$ rette, giace nella retta polare di o rispetto alle n rette (*).

Da questo teorema, per $n = 3$, si ricava:

Le rette polari di un punto dato rispetto agli angoli di un trilatero incontrano i lati rispettivamente opposti in tre punti situati in una stessa retta, che è la polare del punto dato rispetto al trilatero risguardato come luogo di terz' ordine.

E reciprocamente: se i lati bc, ca, ab di un trilatero abc sono incontrati da una trasversale in a', b', c', e se a_1, b_1, c_1 sono ordinatamente i coniugati armonici di a', b', c' rispetto alle coppie bc, ca, ab, le rette aa_1, bb_1, cc_1 concorrono in uno stesso punto (il polo della trasversale).

77. Le prime polari di due punti qualunque o, o' (rispetto alla data curva C_n) si segano in $(n-1)^2$ punti, ciascun de' quali, giacendo in entrambe le prime polari, avrà la sua retta polare passante sì per o che per o' (69, a). Dunque:

Una retta qualunque è polare di $(n-1)^2$ punti diversi, i quali sono le intersezioni delle prime polari di due punti arbitrari della medesima. Ossia:

Le prime polari di tutt' i punti di una retta formano un fascio di curve passanti per gli stessi $(n-1)^2$ punti (**).

(a) In virtù di tale proprietà, tutte le prime polari passanti per un punto o hanno in comune altri $(n-1)^2 - 1$ punti, cioè formano un fascio, la base del quale consta degli $(n-1)^2$ poli della retta polare di o. Per due punti o, o' passa una sola prima polare ed è quella il cui polo è l' intersezione delle rette polari di o ed o'.

Dunque tre prime polari bastano per individuare tutte le altre. Infatti: date tre prime polari C', C'', C''', i cui poli non siano in linea retta, si domanda quella che passa per due punti dati o, o'. Le curve C', C'' determinano un fascio, ed un altro fascio è determinato dalle C', C'''. Le curve che appartengono rispettivamente a questi due fasci e passano entrambe per o individuano un terzo fascio. Quella curva del terzo fascio che passa per o' è evidentemente la richiesta.

(b) Se tre prime polari, i cui poli non siano in linea retta, passano per uno stesso punto, questo sarà comune a tutte le altre prime polari e sarà doppio per la curva fondamentale (73); infatti la sua retta polare, potendo passare per qualunque punto del piano (69, a), riesce indeterminata (72).

(*) CAYLEY, *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Giornale di CRELLE, t. 31, Berlino 1847, p. 271).

(**) BOBILLIER. *Démonstrations de quelques théorèmes sur les lignes etc.* (Annales de GERGONNE, t. 18, Nismes 1827-28, p. 97).

78. Suppongasi che la polare $(r)^{ma}$ di un punto o abbia un punto doppio o', onde la prima polare di un punto arbitrario m rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o (considerata questa come curva fondamentale) passerà per o' (73). A cagione del teorema (69, d), la prima polare di m rispetto alla $(n-r-1)^{ma}$ polare di o' passerà per o. Inoltre, siccome l' $(r+1)^{ma}$ polare di o passa per o', così il punto o giace nell' $(n-r-1)^{ma}$ polare di o' (69, a). Dunque (77, b):

Se la polare $(r)^{ma}$ di o ha un punto doppio o', viceversa l' $(n-r-1)^{ma}$ polare di o' ha un punto doppio in o (*).

Per esempio: se la prima polare di o ha un punto doppio o', la conica polare di o' sarà il sistema di due rette segantisi in o; e viceversa.

(a) Se la data curva C_n ha una cuspide d, la conica polare di questo punto si risolve in due rette coincidenti nella retta che tocca C_n in d (72). Ciascun punto m di questa retta può risguardarsi come un punto doppio della conica polare di d; dunque d sarà un punto doppio della prima polare di m, ossia:

Se la curva fondamentale ha una cuspide, la prima polare di un punto qualunque della tangente cuspidale passa due volte per la cuspide.

Queste prime polari aventi un punto doppio in d formano un fascio (77, a); epperò fra esse ve ne sono due, per le quali d è una cuspide (48). Una delle due prime polari cuspidate è quella che ha per polo lo stesso punto d (72).

(b) L' $(s)^{ma}$ polare di un punto m rispetto all' $(r)^{ma}$ polare di un altro punto o abbia un punto doppio o'; vale a dire (69, c), l' $(r)^{ma}$ polare di o rispetto all' $(s)^{ma}$ polare di m passi due volte per o'. Applicando all' $(s)^{ma}$ polare di m il teorema dimostrato per la curva C_n (78), troviamo che l' $\left((n-s)-r-1\right)^{ma}$ polare di o' rispetto all' $(s)^{ma}$ polare di m ha un punto doppio in o. Dunque:

Se l' $(s)^{ma}$ polare di m rispetto all' $(r)^{ma}$ polare di o ha un punto doppio o', viceversa l' $(s)^{ma}$ polare di m rispetto all' $(n-r-s-1)^{ma}$ polare di o' avrà un punto doppio in o.

79. L' $(r)^{ma}$ polare di o abbia una cuspide o'; l' $(n-r-1)^{ma}$ polare di o' passerà due volte per o (78). Se poi si designa con m un punto qualunque della retta che tocca nella cuspide o' l' $(r)^{ma}$ polare di o, la prima polare di m rispetto alla stessa $(r)^{ma}$ polare di o avrà un punto doppio in o' (78, a); epperò (78, b) la prima polare di m rispetto all' $(n-r-2)^{ma}$ polare di o' avrà un punto doppio in o.

Da questa proprietà, fatto $r=1$, discende:

Se la prima polare di o ha una cuspide o', ciascun punto della tangente cuspidale ha per conica polare, re-

---

(*) STEINER, *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* (Giornale di CRELLE, t. 47, Berlino 1853, p. 4).

lativamente alla cubica polare di o', un pajo di rette incrociantisi in o.

È evidente che ciascuna di queste rette determina l' altra, vale a dire, tutte le analoghe paja di rette costituiscono un' involuzione (di secondo grado); onde nella tangente cuspidale vi saranno due punti, ciascun de' quali avrà per conica polare (rispetto alla cubica polare di o') un pajo di rette riunite in una sola retta passante per o.

Il punto o è doppio per la conica polare (relativa alla cubica polare di o') di ciascun punto m della tangente cuspidale; viceversa adunque (78) m è un punto doppio della conica polare di o (relativa alla cubica polare di o'). Ossia: la retta che tocca la prima polare di o nella cuspide o', considerata come il sistema di due rette coincidenti, è la conica polare di o rispetto alla cubica polare di o'.

Le rette doppie dell' involuzione suaccennata incontrino la tangente cuspidale in o_1, o_2. Siccome o_1 è un punto doppio sì per la conica polare (sempre rispetto alla cubica polare di o') di o, che per la conica polare rappresentata dalla retta oo_1, così (78) la conica polare di o_1 avrà un punto doppio in o ed un altro sopra o_1o_2, vale a dire, sarà il sistema di due rette coincidenti. Dunque le rette oo_2, oo_1 costituiscono separatamente le coniche polari de' punti o_1, o_2; ossia:

Se la prima polare di o ha una cuspide o', nella tangente cuspidale esistono due punti o_1, o_2, i quali insieme con o formano un triangolo, tale che ciascun lato considerato come due rette coincidenti è la conica polare del vertice opposto, relativamente alla cubica polare del punto o'.

80. Consideriamo ora una tangente stazionaria della data curva C_n ed il relativo punto di contatto o flesso i. Preso un polo o nella tangente stazionaria e considerata questa come trasversale (68), tre punti a sono riuniti nel flesso (29), epperò questo tien luogo di due centri armonici del grado $n-1$ e di un centro armonico del grado $n-2$ (16). Vale a dire, la prima polare di o passa per i ed ivi tocca C_n; e per i passa anche la seconda polare di o.

Come adunque per i passa la seconda polare d' ogni punto o della tangente stazionaria, così (69, a) la conica polare di i conterrà tutt' i punti della tangente medesima. Dunque *la conica polare di un flesso si decompone in due rette, una delle quali è la rispettiva tangente stazionaria.*

Se i' è il punto comune alle due rette che formano la conica polare del flesso i, la prima polare di i' avrà (78) un punto doppio in i. Ossia: un flesso della curva data è un punto doppio di una prima polare, il cui polo giace nella tangente stazionaria.

Se un punto p appartiene a C_n ed ha per conica polare il sistema di due rette, esso sarà o un punto doppio o un flesso della curva data. Infatti: o le due rette passano entrambe per p, e la retta polare di questo punto riesce indeterminata, cioè p è un punto doppio della curva. Ovvero, una sola delle due rette passa per p, ed è la tangente alla curva in questo punto (71); tutt' i punti di questa retta appartengono alle polari $(n-1)^{ma}$ ed $(n-2)^{ma}$

di p, dunque la prima e la seconda polare di ciascun di que' punti passa per p, il che non può essere, se quella retta non ha in p un contatto tripunto colla curva data (16).

81. Siccome ad ogni punto preso nel piano della curva fondamentale C_n corrisponde una retta polare, così domandiamo: se il polo percorre una data curva C_m d' ordine m, di qual classe è la curva inviluppata dalla retta polare? ossia, quante rette polari passano per un arbitrario punto o, ciascuna avente un polo in C_m? Se la retta polare passa per o, il polo è (69, a) nella prima polare di o, la quale sega C_m in $m(n-1)$ punti. Questi sono i soli punti di C_m, le rette polari de' quali passino per o; dunque: se il polo percorre una curva dell' ordine m, la retta polare inviluppa una curva della classe $m(n-1)$.

(a) Per $m=1$ si ha: se il polo percorre una retta R, la retta polare inviluppa una curva della classe $n-1$.

(b) Se la curva fondamentale ha un punto $(r)^{plo}$ d, la prima polare di o passa $r-1$ volte per d (73); quindi, se anche R passa per quest' ultimo punto, la prima polare di o segherà R in altri $(n-1)-(r-1)$ punti; cioè la classe dell' inviluppo richiesto sarà $n-r$.

(c) Se inoltre s rami di C_n hanno in d la tangente comune, questa tocca ivi $s-1$ rami della prima polare di o (74); onde, se R è questa tangente, le rimanenti sue intersezioni colla prima polare di o saranno in numero $(n-1)-(r-1)-(s-1)$; dunque la classe dell' inviluppo è in questo caso $n-(r+s-1)$.

82. Come la teoria de' centri armonici di un sistema di punti in linea retta serve di base alla teoria delle curve polari relative ad una curva fondamentale di dato ordine, così le proprietà degli assi armonici di un fascio di rette divergenti da un punto (19, 20) conducono a stabilire un' analoga teoria di inviluppi polari relativi ad una curva fondamentale di data classe.

Data una curva K della classe m ed una retta R nello stesso piano, da un punto qualunque p di R siano condotte le m tangenti a K; gli assi armonici, di grado r, del sistema di queste m tangenti rispetto alla retta fissa R inviluppano, quando p muovasi in R, una linea della classe r. Così la retta R dà luogo ad $m-1$ inviluppi polari, le cui classi cominciano con $m-1$ e finiscono con 1. L' inviluppo polare di classe più alta tocca le rette tangenti a K ne' punti comuni a questa linea e ad R; onde segue che R incontra K in $m(m-1)$ punti, cioè una curva della classe m è generalmente dell' ordine $m(m-1)$. Ma questo è diminuito di due unità per ogni tangente doppia e di tre unità per ogni tangente stazionaria di cui sia dotata la curva fondamentale; ecc. ecc.

Art. XIV. Teoremi relativi ai sistemi di curve.

83. Due serie di curve (34) si diranno projettive, quando, in virtù di una qualsiasi legge data, a ciascuna curva della prima serie corrisponda una sola curva della seconda e reciprocamente.

Una serie d' indice M e d' ordine m sia projettiva ad una serie d' indice N e d' ordine n; di quale ordine è la linea luogo delle intersezioni di due curve corrispondenti? Ossia, in una retta trasversale arbitraria quanti punti

esistono, per ciascun de' quali passino due curve corrispondenti? Sia a un punto qualunque della trasversale, pel quale passano M curve della prima serie; le M corrispondenti curve della seconda serie incontreranno la trasversale in Mn punti a'. Se invece si assume ad arbitrio un punto a' nella trasversale e si considerano le N curve della seconda serie che passano per esso, le N corrispondenti curve della prima serie segano la trasversale in Nm punti a. Dunque a ciascun punto a corrispondono Mn punti a' ed a ciascun punto a' corrispondono Nm punti a. Cioè, se i punti a, a' si riferiscono ad una stessa origine o (fissata ad arbitrio nella trasversale), fra i segmenti oa, oa' avrà luogo un' equazione di grado Mn rispetto ad oa' e di grado Nm rispetto ad oa. Onde, se a' coincide con a, si avrà un' equazione del grado $Mn + Nm$ in oa, vale a dire, la trasversale contiene $Mn + Nm$ punti del luogo richiesto. Abbiamo così il teorema generale (*):

Date due serie projettive di curve, l' una d' indice M e d' ordine m, l' altra d' indice N e d' ordine n, il luogo de' punti comuni a due curve corrispondenti è una linea dell' ordine $Mn + Nm$.

(a) Per $M = N = 1$, questo teorema dà l' ordine della curva luogo delle intersezioni delle linee corrispondenti in due fasci projettivi (50). E nel caso di $m = n = 1$ si ha:

Se le tangenti di una curva della classe M corrispondono projettivamente, ciascuna a ciascuna, alle tangenti di un' altra curva della classe N, il luogo del punto comune a due tangenti omologhe è una linea dell' ordine $M + N$.

(b) Analogamente si dimostra quest' altro teorema, che può anche conchiudersi da quello ora enunciato, in virtù del principio di dualità:

Se a ciascun punto di una data curva d' ordine M corrisponde, in forza di una certa legge, un solo punto di un' altra curva data dell' ordine N, e reciprocamente, se ad ogni punto di questa corrisponde un sol punto di quella, la retta che unisce due punti omologhi inviluppa una curva della classe $M + N$.

84. Data una serie d' indice N e d' ordine n, cerchiamo di quale indice sia la serie delle polari $(r)^{me}$ d' un dato punto o rispetto alle curve della serie proposta. Quante polari siffatte passano per un punto qualunque, ex. gr. per lo stesso punto dato o? Le sole polari passanti pel polo o sono quelle relative alle curve della data serie, che s' incrociano in o, e queste sono in numero N. Dunque:

Le polari $(r)^{me}$ di un dato punto, rispetto alle curve d' ordine n d' una serie d' indice N, formano una serie d' indice N e d' ordine $n - r$. La nuova serie è projettiva alla prima.

(a) Per $N = 1$ si ha: le polari $(r)^{me}$ di un dato punto rispetto alle curve di un fascio formano un nuovo fascio projettivo al primo (**).

(*) Jonquières, *Théorèmes généraux etc.* p. 117.

(**) Bobillier, *Recherches sur les lois qui régissent les lignes etc.* Annales de Gergonne, t. 18, Nismes 1827-28, p. 256).

(b) Se $r = n - 1$, si ottiene il teorema:

Le rette polari d'un punto dato rispetto alle curve d'una serie d'indice N inviluppano una linea della classe N.

(c) Ed in particolare, se $N = 1$: le rette polari d'un punto dato rispetto alle curve d'un fascio concorrono in uno stesso punto e formano una stella projettiva al fascio dato.

85. Data una serie d'indice N e d'ordine n, ed un punto o, si consideri l'altra serie formata dalle prime polari di o relative alle curve della serie data (84). I punti in cui una delle curve d'ordine n è segata dalla relativa prima polare sono anche (70) i punti ove la prima curva è toccata da rette uscenti da o. Siccome poi le due serie sono projettive, così applicando ad esse il teorema generale di Jonquières (83), avremo:

Se da un punto o si conducono le tangenti a tutte le curve d'ordine n d'una serie d'indice N, i punti di contatto giacciono in una linea dell'ordine $N(2n - 1)$.

Essendo il punto o situato in N curve della data serie, la curva luogo de' contatti passerà N volte pel punto medesimo ed ivi avrà per tangenti le rette che toccano le N curve preaccennate. Ogni retta condotta per o incontrerà quel luogo in altri $2N(n - 1)$ punti, dunque:

Fra le curve d'ordine n d'una serie d'indice N ve ne sono $2N(n - 1)$ che toccano una retta qualsivoglia data.

Se $N = 1$, si ricade nel teorema (49).

86. Data una serie d'indice N e d'ordine n, di quale ordine è il luogo di un punto, pel quale una retta data sia la polare rispetto ad alcuna delle curve della serie? Cerchiamo quanti siano in una retta qualunque, ex gr. nella stessa retta data, i punti dotati di quella proprietà. I soli punti giacenti nella propria retta polare sono quelli ove la retta medesima tocca curve della data serie. Onde, pel teorema precedente, avremo:

Il luogo dei poli di una retta data, rispetto alle curve d'ordine n d'una serie d'indice N, è una linea dell'ordine $2N(n - 1)$.

Quando è $N = 1$, in causa del teorema (84, c), un punto a apparterrà al luogo di cui si tratta, se le sue rette polari relative alle curve date concorrano in un punto b della retta data. Ma, in tal caso, le prime polari di b passano per a (69, a); dunque (*):

Dato un fascio d'ordine n, le prime polari d'uno stesso punto rispetto alle curve del fascio formano un nuovo fascio. Se il polo percorre una retta fissa, i punti-base del secondo fascio generano una linea dell'ordine $2(n - 1)$, che è anche il luogo dei poli della retta data rispetto alle curve del fascio proposto.

87. Quale è il luogo di un punto che abbia la stessa retta polare rispetto ad una data curva C_n d'ordine n e ad alcuna delle curve C_n d'una data serie d'indice M? Per risolvere il problema, cerchiamo quanti punti del luogo

---

*) Bobillier, *ibidem*.

richiesto siano contenuti in una trasversale assunta ad arbitrio. Sia a un punto qualunque della trasversale; A la retta polare di a rispetto a C_n. Il luogo dei poli della retta A rispetto alle curve C_m è (86) una linea dell'ordine $2M(m-1)$, che segherà la trasversale in $2M(m-1)$ punti a'. Reciprocamente: assunto ad arbitrio un punto a' nella trasversale, le rette polari di a' rispetto alle curve C_m formano (84, b) una curva della classe M, la quale ha $M(n-1)$ tangenti comuni colla curva di classe $n-1$ inviluppo delle rette polari de' punti della trasversale relative a C_n (81, a). Queste $M(n-1)$ tangenti comuni sono polari, rispetto a C_n, d'altrettanti punti a della trasversale. Così ad ogni punto a corrispondono $2M(m-1)$ punti a' ed a ciascun punto a' corrispondono $M(n-1)$ punti a; dunque (83) vi saranno $2M(m-1)+M(n-1)$ punti a, ciascuno de' quali coinciderà con uno de' corrispondenti a'. Per conseguenza:

Il luogo di un punto avente la stessa retta polare, rispetto ad una data curva d'ordine n e ad alcuna delle curve d'una serie d'indice M e d'ordine m, è una linea dell'ordine $M(n+2m-3)$.

(a) Se la data curva C_n ha un punto doppio d (ordinario o stazionario), la retta polare di questo punto rispetto a C_n è indeterminata (72), onde può assumersi come tale la tangente a ciascuna delle M curve C_m passanti per d. Dunque la curva d'ordine $M(n+2m-3)$, che indicheremo con K, passa M volte per ciascuno de' punti doppi ordinari o stazionari della curva C_n.

(b) Sia d un punto stazionario di C_n e si applichi alla tangente cuspidale T il ragionamento dianzi fatto per un'arbitraria trasversale. Se si riflette che, nel caso attuale, l'inviluppo delle rette polari de' punti di T rispetto a C_n è della classe $n-3$ (81, c), talchè ad ogni punto a' corrisponderanno $M(n-3)$ punti a, si vedrà che la retta T, prescindendo dal punto d, incontra la curva K in $M(n+2m-5)$ punti, ossia il punto d equivale a $2M$ intersezioni di K e T. Per conseguenza (32) in d sono riuniti $3M$ punti comuni alle linee K e C_n.

(c) Di qui s'inferisce che, se la data curva C_n ha δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, essa sarà incontrata dalla linea K in altri $M\{n(n+2m-3)-2\delta-3\varkappa\}$ punti. Ma questi, in virtù della definizione della linea K, sono i punti ove C_n è toccata da curve della data serie; dunque:

In una serie d'indice M e d'ordine m vi sono $M\{n(n+2m-3)-2\delta-3\varkappa\}$ curve che toccano una data linea d'ordine n, dotata di δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi (*).

(d) Per $M=m=1$ si ha:

Il numero delle rette tangenti che da un dato punto si possono condurre ad una curva d'ordine n, avente δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, è $n(n-1)-2\delta-3\varkappa$: risultato già ottenuto altrove (74, c).

88. In un fascio d'ordine m quante sono le curve dotate di un punto doppio? Assunti ad arbitrio tre punti o, o', o'' (non situati in linea retta), le loro prime polari relative alle curve del dato fascio formano (84, a) tre altri

---

(*) BISCHOFF, *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven* (Giornale CRELLE-BORCHARDT, t. 56, Berlino 1859, p. 172). — JONQUIÈRES, *Théorèmes généraux etc.* p. 120.

fasci projettivi d' ordine $m-1$, ne' quali si considerino come curve corrispondenti le polari di o, o', o'' rispetto ad una stessa curva del fascio proposto. Se una delle curve date ha un punto doppio, in esso s' intersecano le tre corrispondenti prime polari di o, o', o'' (73). Dunque i punti doppi delle curve del dato fascio sono que' punti del piano, pei quali passano tre curve corrispondenti de' tre fasci projettivi di prime polari.

Ora, il primo ed il secondo fascio, colle mutue intersezioni delle linee corrispondenti, generano (50) una curva d' ordine $2(m-1)$; ed un' altra curva dello stesso ordine è generata dal primo e terzo fascio. Queste due curve passano entrambe per gli $(m-1)^2$ punti-base del primo fascio di polari; epperò esse si segheranno in altri $3(m-1)^2$ punti, i quali sono evidentemente i richiesti. Cioè:

Le curve d' ordine m di un fascio hanno $3(m-1)^2$ punti doppi.

(a) Le curve date si tocchino fra loro in un punto o, talchè una di esse, C_m, abbia ivi un punto doppio (47). Il punto o' sia preso nella tangente comune alle curve date, ed o'' sia affatto arbitrario. Le prime polari di o relative alle curve del fascio proposto passano tutte per o, ivi toccando oo' (71); ed una di esse, quella che si riferisce a C_m, ha in o un punto doppio (72). Anche le polari di o' passano tutte per o (70); ma fra le polari di o'' una sola passa per o, quella cioè che corrisponde a C_m (73).

Le polari di o e quelle di o' generano una curva dell' ordine $2(m-1)$, per la quale o è un punto doppio ed oo' una delle relative tangenti (52, a). E le polari di o con quelle di o'' generano un' altra curva dello stesso ordine, anch' essa passante due volte per o (51, b). Dunque il punto o, doppio per entrambe le curve d' ordine $2(m-1)$, equivale a quattro intersezioni. In o le polari di questo punto si toccano, epperò gli altri punti-base del fascio da esse formato sono in numero $(m-1)^2-2$. Oltre a questi punti e ad o, le due curve d' ordine $2(m-1)$ avranno $4(m-1)^2-4-\{(m-1)^2-2\}$ $=3(m-1)^2-2$ intersezioni comuni.

Dunque il punto o, ove si toccano le curve del dato fascio, conta per *due* fra i punti doppi del fascio medesimo.

(b) Suppongasi ora che nel dato fascio si trovi una curva C_m dotata di una cuspide o. Sia o' un punto preso nella tangente cuspidale, ed o'' un altro punto qualsivoglia. Le prime polari di o rispetto alle curve date formano un fascio, nel quale v' ha una curva (la polare relativa a C_m) avente una cuspide in o colla tangente oo' (72). Alla quale curva corrispondono, nel fascio delle polari di o', una curva passante due volte per o (78, a), e nel fascio delle polari di o'', una curva passante per o ed ivi toccante oo' (74, c). Perciò il primo ed il secondo fascio generano una curva d' ordine $2(m-1)$, per la quale o è un punto doppio (51, f); mentre il primo ed il terzo fascio danno nascimento ad una curva di quello stesso ordine, passante semplicemente per o ed ivi toccante la retta oo' (51, g). Queste due curve hanno adunque due punti comuni riuniti in o; talchè, astraendo dagli $(m-1)^2$ punti-base del primo fascio, le rimanenti intersezioni saranno $3(m-1)^2-2$.

Ossia: se in un fascio v' ha una curva dotata di una cuspide, questa conta per *due* fra i punti doppi del fascio.

(c) Da ultimo supponiamo che tutte le curve del fascio proposto passino

per o, cuspide di C_m. Sia ancora o' un punto della tangente cuspidale di C_m, e si prenda o'' nella retta che tocca in o tutte le altre curve del fascio. Le polari di o passano per questo punto, toccando ivi oo'' ed una fra esse, quella relativa a C_m, ha una cuspide in o colla tangente oo' (71, 72) Le polari di o'' passano anch' esse per o (70); ma una sola, quella che si riferisce a C_m, tocca ivi oo' (74, c). E fra le polari di o', soltanto quella che è relativa a C_m passa per o, ed invero vi passa due volte (78, a). Donde segue che le polari di o ed o'' generano una curva d' ordine $2(m-1)$, per la quale o è un punto doppio colle tangenti oo', oo'' (52, a); e le polari di o ed o' generano un' altra curva dello stesso ordine, cuspidata in o colla tangente oo' (51, c). Pertanto le due curve così ottenute hanno in o un punto doppio ed una tangente (oo') comune, ossia hanno in o cinque intersezioni riunite (32). Messi da parte il punto o, nel quale tutte le polari del primo fascio si toccano, e gli altri $(m-1)^2-2$ punti-base del fascio medesimo, il numero delle rimanenti intersezioni delle due curve d' ordine $2(m-1)$ sarà $3(m-1)^2-3$.

Dunque il punto o comune a tutte le curve del fascio proposto, una delle quali è ivi cuspidata, conta per *tre* fra i punti doppi del fascio medesimo.

(d) Applicando il teorema generale (dimostrato al principio del presente n.°) al fascio delle prime polari de' punti di una data retta (77), rispetto ad una curva C_n d' ordine n, si ha:

In una retta qualunque vi sono $3(n-2)^2$ punti, ciascun de' quali ha per prima polare, rispetto ad una data linea dell' ordine n, una curva dotata di un punto doppio.

O in altre parole, avuto anche riguardo al teorema (78):

Il luogo dei poli delle prime polari dotate di punto doppio, rispetto ad una data linea d' ordine n, ossia il luogo de' punti d' incrociamento di quelle coppie di rette che costituiscono coniche polari, è una curva dell' ordine $3(n-2)^2$.

Questo luogo si chiamerà *curva Steineriana* (*) della curva fondamentale C_n.

(e) Se la curva fondamentale ha una cuspide d, ogni punto della tangente cuspidale è polo di una prima polare avente un punto doppio in d (78, a). Perciò la tangente medesima farà parte della Steineriana.

89. Le rette polari di un punto fisso rispetto alle curve d' un fascio passano tutte per un altro punto fisso (84, c). Se si considera nel fascio una curva dotata di un punto doppio d, la retta polare di d rispetto a questa curva è indeterminata (72); talchè le rette polari di d, relativamente a tutte le altre curve del fascio, si confonderanno in una retta unica. Vale a dire:

I punti doppi delle curve d' un fascio godono della proprietà che ciascun d' essi ha la stessa retta polare rispetto a tutte le curve del fascio.

(*) Dal nome del grande geometra alemanno che primo, a quanto io so, la fece conoscere

Di qui s' inferisce che (86):

Il luogo dei poli di una retta rispetto alle curve di un fascio d' ordine m è una linea dell' ordine $2(m-1)$ passante pei $3(m-1)^2$ punti doppi del fascio.

E il luogo di un punto avente la stessa retta polare, rispetto ad una data curva C_n e alle curve C_m d' un fascio, è (87) una curva dell' ordine $n+2m-3$ passante pei $3(m-1)^2$ punti doppi del fascio. Pertanto questi punti e quelli ove C_n è toccata da alcuna delle C_m giacciono tutti insieme nell' anzidetta curva d' ordine $n+2m-3$. In particolare:

Una retta data è toccata da $2(m-1)$ curve d' un dato fascio d' ordine m. I $2(m-1)$ punti di contatto, insieme coi $3(m-1)^2$ punti doppi del fascio, giacciono in una curva dell' ordine $2(m-1)$, luogo dei poli della retta data rispetto alle curve del fascio.

90. Dati due fasci di curve, i cui ordini siano m ed m_1, vogliamo indagare di qual ordine sia il luogo di un punto nel quale una curva del primo fascio tocchi una curva del secondo. Avanti tutto, è evidente che il luogo richiesto passa per gli $m^2+m_1^2$ punti-base dei due fasci; perchè, se a è un punto-base del primo fascio, per esso passa una curva del secondo, alla quale condotta la tangente in a, vi è una certa curva del primo fascio, che tocca questa retta nel punto medesimo (46). Osservisi poi che una curva del primo fascio è toccata dalle curve del secondo in $m(m+2m_1-3)$ punti (87): laonde quella curva del primo fascio, oltre agli m^2 punti-base, contiene $m(m+2m_1-3)$ punti del luogo richiesto, cioè in tutto $m(2m+2m_1-3)$ punti. Dunque il luogo di cui si tratta è dell' ordine $2(m+m_1)-3$; esso passa non solo pei punti-base dei due fasci, ma anche pei loro $3(m-1)^2+3(m_1-1)^2$ punti doppi (88), perchè ciascuno di questi equivale a *due* intersezioni di una curva dell' un fascio con una dell' altro. Abbiamo così il teorema:

Dati due fasci di curve, le une d' ordine m, le altre d' ordine m_1, i punti di contatto delle une colle altre sono in una linea dell' ordine $2(m+m_1)-3$, che passa pei punti-base e pei punti doppi dei due fasci.

(a) Suppongasi che le curve dei due fasci siano prime polari relative ad una data curva fondamentale C_n d' ordine n, epperò pongasi $m=m_1=n-1$. I punti-base de' due fasci sono i poli di due rette (77), talchè giacciono tutti insieme nella prima polare del punto comune a queste rette medesime (69, a): vale a dire, i due fasci hanno, in questo caso, una curva comune. Tale curva comune fa evidentemente parte del luogo dianzi determinato. onde, astraendo da essa, rimane una curva dell' ordine $4(n-1)-3-(n-1)=3(n-2)$, passante pei punti doppi de' fasci dati, qual luogo de' punti di contatto fra le curve dell' uno e le curve dell' altro fascio. Questa curva dell' ordine $3(n-2)$ non cambia, se altri fasci di prime polari sostituiscansi ai due dati; infatti, siccome tutte le prime polari passanti per un dato punto hanno altri $(n-1)^2-1$ punti comuni e formano un fascio (77, a), così, se due prime polari si toccano in quel punto, anche tutte le altre hanno ivi la stessa tangente.

Di qui s' inferisce che la curva luogo de' punti di contatto fra due prime

polari contiene i punti doppi di tutti i fasci di prime polari, e per conseguenza, avuto riguardo al teorema (78), è anche il luogo dei poli di quelle coniche polari che si risolvono in due rette. Cioè:

Il luogo di un punto nel quale si tocchino due (epperò infinite) prime polari relative ad una data curva d'ordine n, è una linea dell'ordine $3(n-2)$, la quale può anche definirsi come luogo dei punti doppi delle prime polari, e come luogo di un polo la cui conica polare sia una coppia di rette.

A questa linea si dà il nome di *Hessiana* della data curva fondamentale, perchè essa offre l'interpretazione geometrica di quel *covariante* che Sylvester chiamò *Hessiano* (dal nome del sig. Hesse), cioè del determinante formato colle derivate seconde parziali di una data forma omogenea a tre variabili (*).

(b) I punti in cui si segano le prime polari di due punti o, o' sono i poli della retta oo' (77); talchè, se le due prime polari si toccano, la retta oo' ha due poli riuniti nel punto di contatto. Se adunque conveniamo di chiamar *congiunti* gli $(n-1)^2$ poli di una medesima retta, potremo dire:

L'Hessiana è il luogo di un polo che coincida con uno de' suoi poli congiunti.

(c) Chiamate *indicatrici di un punto* le due rette tangenti che da esso ponno condursi alla sua conica polare, si ottiene quest'altro enunciato:

La curva fondamentale e l'Hessiana costituiscono insieme il luogo di un punto, le due indicatrici del quale si confondono in una retta unica.

91. Dati tre fasci di curve, i cui ordini siano m_1, m_2, m_3, in quanti punti queste si toccano a tre a tre? I punti in cui si toccano a due a due le curve de' primi due fasci sono (90) in una linea dell'ordine $2(m_1+m_2)-3$; ed analogamente il luogo de' punti di contatto fra le curve del primo e le curve del terzo fascio è un' altra linea dell'ordine $2(m_1+m_3)-3$. Le due linee hanno in comune i punti-base ed i punti doppi del primo fascio, cioè $m_1^2+3(m_1-1)^2$ punti estranei alla questione, talchè esse si segheranno in altri $\left(2(m_1+m_2)-3\right)\left(2(m_1+m_3)-3\right)-\left(m_1^2+3(m_1-1)^2\right)$
$=4(m_2m_3+m_3m_1+m_1m_2)-6(m_1+m_2+m_3-1)$ punti. E questi sono evidentemente i richiesti.

(a) Posto $m_3=1$, si ha:

Le tangenti comuni ne' punti ove si toccano le curve di due fasci, i cui ordini siano m_1, m_2, inviluppano una linea della classe $4m_1m_2-2(m_1+m_2)$.

(b) Se le curve de' due fasci sono prime polari relative ad una data linea C_n d'ordine n, onde $m_1=m_2=n-1$, i due fasci hanno una curva comune (90, a) la quale è dell'ordine $n-1$, epperò (70) della clas-

---

(*) Sylvester, *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions* (Philosophical Transactions, vol. 143, part 3, London 1853, p. 515).

se $(n-1)(n-2)$. È evidente che questa curva fa parte dell' inviluppo dianzi accennato; talchè questo conterrà inoltre una curva della classe $3(n-1)(n-2)$, cioè:

Le tangenti comuni ne' punti di contatto fra le prime polari relative ad una data curva d' ordine n inviluppano una linea della classe $3(n-1)(n-2)$ (*).

Art. XV. Reti geometriche.

92. Il completo sistema delle linee d' ordine m soggette ad $\frac{m(m+3)}{2}-2$ condizioni comuni chiamasi rete geometrica d' ordine m, quando per due punti presi ad arbitrio passa una sola linea del sistema, vale a dire, quando le linee del sistema passanti per uno stesso punto arbitrario formano un fascio (**).

Per esempio, le prime polari relative ad una data curva d' ordine n formano una rete geometrica d' ordine $n-1$ (77, a); anzi, molte proprietà di quelle si possono applicare, colle identiche dimostrazioni, ad una rete qualsivoglia.

Due fasci d' ordine m i quali abbiano una curva comune, ovvero tre curve d' ordine m le quali non passino per gli stessi m^2 punti, determinano una rete geometrica d' ordine m (77, a).

Il luogo di un punto nel quale si tocchino due (epperò infinite) curve d' una data rete d' ordine m, è una linea dell' ordine $3(m-1)$. Questa linea, che può chiamarsi l' *Hessiana della rete*, è anche il luogo de' punti doppi delle curve della rete (90, a).

Le tangenti comuni ne' punti di contatto fra le curve della rete inviluppano una linea della classe $3m(m-1)$ (91, b).

(a) Supponiamo che tutte le curve di una data rete abbiano un punto comune a. Condotta una retta A per a, sia a' il punto di A infinitamente vicino ad a; infinite curve della rete passeranno per a' (cioè toccheranno la retta A in a), formando un fascio. E condotta per a una seconda retta A_1, nella quale sia a_1 il punto successivo ad a, vi sarà una (ed una sola) curva della rete che passi per a' e per a_1, cioè che abbia un punto doppio in a. Dunque: allorchè tutte le curve di una rete hanno un punto comune, una di esse ha ivi un punto doppio, e quelle che nel punto medesimo toccano una stessa retta formano un fascio.

(b) Suppongasi in secondo luogo che tutte le curve di una data rete abbiano un punto comune a ed ivi tocchino una stessa retta T. Condotta una retta A ad arbitrio per a, vi saranno infinite curve della rete passanti pel punto di A successivo ad a, e tali curve formeranno un fascio. Ciascuna di esse è

(*) Steiner, *l. c.* p. 4-6.
(**) Möbius, *l. c.* p. 266. — Steiner, *l. c.* p. 5.

incontrata sì da T che da A in due punti riuniti in a, cioè per esse questo punto è doppio; talchè quel fascio non cambia col mutarsi della retta A intorno ad a. Fra le curve del fascio, due sono cuspidate in a (48), ed una di queste ha per tangente cuspidale la retta T. Ed invero quest' ultima curva è individuata dal dover incontrare T in tre punti ed A in due punti, tutti coincidenti in a.

93. Date tre curve C, C', C'', gli ordini delle quali siano rispettivamente m, m', m'', proponiamoci di determinare il luogo di un punto le cui rette polari, rispetto a quelle curve, concorrano in uno stesso punto; ossia, con altre parole (69, a), il luogo di un punto nel quale si seghino le prime polari di uno stesso punto relative alle curve date. A tal uopo procederemo così: per un punto o fissato ad arbitrio si conduca una retta L e si determinino i punti dotati della proprietà che in ciascun d' essi concorrano le prime polari di uno stesso punto di L; indi, fatta girare questa retta intorno ad o, si otterranno tutt' i punti del luogo richiesto.

Le prime polari de' punti di L rispetto alle curve C, C' formano due fasci projettivi (77), onde le curve corrispondenti, cioè le polari di uno stesso punto di L, si segheranno ne' punti di una curva K' dell' ordine $m+m'-2$ passante pei punti delle basi de' due fasci. E qui si noti che la base del primo fascio è formata dagli $(m-1)^2$ punti ne' quali la prima polare di o rispetto a C sega la prima polare di un altro punto qualunque di L rispetto alla curva medesima. Così abbiamo ottenuto la curva K', luogo di un punto pel quale passino le prime polari, relative a C e C', di uno stesso punto di L.

Ogni retta L condotta pel punto fisso o individua una curva K'. Di tali curve K' ne passa una sola per un punto qualunque p. Infatti, se per p devono passare le prime polari relative a C e C', il polo sarà l' intersezione p' delle rette polari di p (69, a); il punto p' determina una retta L passante per o, e questa individua la curva K' passante per p. Dunque, variando L intorno ad o, la curva K' genera un fascio (41).

Ora, se alla curva C' si sostituisce C'', la retta L darà luogo analogamente ad una curva K'' d' ordine $m+m''-2$, la quale passerà per gli stessi $(m-1)^2$ punti-base del primo fascio, che ha servito per generare anche K'. Variando L intorno ad o, le corrispondenti curve K'' formano un fascio. I due fasci formati dalle curve K', K'' sono projettivi fra loro, perchè ciascun d' essi è projettivo al fascio di rette L passanti per o. Laonde quei due fasci, l' uno dell' ordine $m+m'-2$, l' altro dell' ordine $m+m''-2$, genereranno una curva dell' ordine $2m+m'+m''-4$ (50). Siccome però due curve corrispondenti K', K'' hanno sempre in comune $(m-1)^2$ punti situati in una curva fissa dell' ordine $m-1$ (la prima polare del punto o rispetto a C), così gli altri $(m+m'-2)(m+m'-2)-(m-1)^2$ $=m'm''+m''m+mm'-2(m+m'+m'')+3$ punti comuni alle omologhe curve K', K'' genereranno una curva dell' ordine $2m+m'+m''-4-(m-1)$ $=m+m'+m''-3$ (50, a). E questo è evidentemente il luogo richiesto.

Questa curva si chiamerà la *Jacobiana* delle tre curve date (*).

(*) SYLVESTER, *l. c.* p. 516.

Se le tre curve date passano per uno stesso punto a, le rette polari di questo passano per esso medesimo; dunque, se le curve C, C', C'' hanno punti comuni a tutte e tre, questi sono anche punti della loro Jacobiana.

Se una delle curve date, per esempio C'', ha un punto doppio d, la retta polare di questo punto rispetto a C'' è indeterminata (72), onde può risguardarsi come tale la retta che unisce d all' intersezione delle rette polari di questo punto relative alle altre due curve C, C'. Dunque la Jacobiana passa pei punti doppi delle curve date.

94. Suppongasi $m'' = m'$, cioè due delle curve date siano dello stesso ordine. In tal caso la Jacobiana non si cambia, se a quelle due curve se ne sostituiscono due altre qualunque del fascio da esse determinato. Il che è evidente, perchè la Jacobiana è il luogo di un punto pel quale passino le tre prime polari d' uno stesso polo; e d' altronde le prime polari d' uno stesso polo rispetto a tutte le curve d' un fascio formano un nuovo fascio (84, a), cioè passano per gli stessi punti.

Nel caso attuale, la Jacobiana ammette una seconda definizione. Se p è un punto di essa, le rette polari di p rispetto alle tre curve date concorrono in uno stesso punto p'. Ma p' è il punto pel quale passano le rette polari di p rispetto a *tutte* le curve del fascio ($C'C''$) (84, c); cioè la retta polare di p rispetto a C sarà anche retta polare dello stesso punto relativamente ad una curva del fascio anzidetto. Onde può dirsi che la Jacobiana delle curve date è il luogo di un punto avente la stessa retta polare rispetto a C e ad alcuna delle curve del fascio ($C'C''$); il qual luogo abbiamo già investigato altrove (87).

95. Supponiamo $m = m' = m''$, cioè le curve date siano tutte e tre dello stesso ordine m. Siccome a due qualunque di esse se ne ponno sostituire (94) due altre del fascio da quelle due determinato, così alle tre date se ne potranno sostituire tre qualunque della rete (92) individuata dalle curve date (purchè non appartengano ad uno stesso fascio), senza che la Jacobiana sia punto alterata. Onde, data una rete di curve d' ordine m, il luogo di un polo, le cui rette polari rispetto alle curve della rete concorrano in uno stesso punto, è una linea d' ordine $3(m-1)$, passante pei punti doppi delle curve medesime (93). Perciò, nel caso di cui si tratta, la Jacobiana coincide coll' Hessiana della rete (92). Abbiamo così un' altra definizione dell' Hessiana di una data rete geometrica.

Vogliamo ora esaminare più davvicino il caso nel quale le curve della rete si seghino tutte in uno stesso punto dato, ed anche quello in cui le curve medesime si tocchino nel punto comune. Nel primo caso possiamo supporre che una delle tre curve individuanti la rete sia quella per la quale il punto dato è un punto doppio; e nel secondo caso potremo assumere quella curva che nel punto dato ha una cuspide ed ivi tocca la tangente comune a tutte le curve della rete (92, a, b).

96. Siano date adunque tre curve C, C', C'' dello stesso ordine m, aventi un punto comune, il quale sia doppio per una di esse, C''; in quel punto si collochi il polo o, del quale abbiamo fatto uso (93) nella ricerca generale della Jacobiana.

(a) Le prime polari del punto o rispetto alle curve C, C' passano per

o, onde per questo punto passerà anche la curva K', qualunque sia la retta L a cui corrisponde (93).

La curva K' corrispondente ad una data retta L rimane la stessa, se alle curve C, C' sostituisconsi due curve qualunque del fascio determinato da quelle. Sostituendo a C la curva C^0 tangente in o alla retta L, le prime polari di tutt' i punti di L relative a C^0 passeranno per o (70). Per o passa anche la prima polare di o relativa a C'; quindi la tangente in o alla curva K' sarà la retta che ivi tocca la prima polare di o rispetto a C^0 (51, a), ossia la retta L. Dunque: quando le curve C, C' sono dello stesso ordine e passano per o, anche la curva K' passa per o ed ivi tocca quella retta L a cui essa corrisponde.

(b) Essendo o un punto doppio per la curva C'', le prime polari, relative ad essa, di tutt' i punti della retta L passano per o ed ivi toccano una medesima retta L', la coniugata armonica di L rispetto alle due tangenti di C'' nel punto doppio (74, c).

La curva K'' (93) è generata da due fasci projettivi, l' uno delle prime polari de' punti di L rispetto a C'', l' altro delle prime polari de' medesimi punti rispetto a C. Le curve del primo fascio hanno in o una stessa tangente L'. E alla curva del secondo fascio che passa per o, cioè alla prima polare di o rispetto a C, corrisponde la prima polare di o relativa a C'', ossia quella curva del primo fascio per la quale o è un punto doppio. Per conseguenza, qualunque sia la retta L, la curva K'' generata dai due fasci ha in o un punto doppio (51, b). Inoltre, quando L sia una delle tangenti di C'' nel punto doppio (51, d), ovvero quando L sia tangente in o alla curva C, nel qual caso anche le curve del secondo fascio passano per o (52, a), in entrambi questi casi, dico, la retta L è una delle tangenti a K'' nel punto doppio o.

Dunque: se C e C'' hanno un punto comune o che sia doppio per C'', la curva K'' relativa ad una data retta L (passante per o) ha un punto doppio in o; ed L è una delle due relative tangenti, ogniqualvolta essa sia tangente in o ad una delle due curve date.

(c) Così abbiamo veduto che, nel caso preso in considerazione, il punto o appartiene a tutte le curve K' relative alle rette L condotte per esso (a) ed è doppio per tutte le curve K'' corrispondenti alle rette medesime (b). Dunque (52) o sarà un punto triplo per la complessiva curva d' ordine $4(m-1)$ generata dai due fasci projettivi delle K' e delle K'' (93). Ma di questa curva complessiva fa parte la prima polare di o relativa a C, la quale prima polare passa una volta per o; dunque questo punto è doppio per la curva rimanente d' ordine $3(m-1)$, cioè per la Jacobiana.

Le rette L sono tangenti (a) alle relative curve K'; dunque (52) le tangenti alla curva risultante d' ordine $4(m-1)$ nel punto triplo o saranno quelle rette L che toccano *anche* le relative curve K''. Ma L tocca la corrispondente K'' (b) quando è tangente a C o a C''; epperò le tre tangenti nel punto triplo sono la tangente a C e le due tangenti di C''. Di queste tre rette, la prima è tangente (71) alla prima polare di o relativa a C; dunque le altre due sono le tangenti della Jacobiana nel punto doppio o.

Così possiamo concludere che:

(d) Data una rete di curve passanti per uno stesso

punto o, la curva Hessiana della rete passa due volte per o ed ivi ha le due tangenti comuni con quella curva della rete, per la quale o è un punto doppio.

97. Passiamo ad esaminare il caso in cui il punto o, comune alle tre curve C, C', C'', sia una cuspide per l' ultima di esse, e la tangente cuspidale T tocchi in o anche C e C'.

(a) Le curve C, C' avendo in o la stessa tangente, all' una di esse può sostituirsi quella curva del fascio (CC') che ha un punto doppio in o (47); onde questo punto sarà doppio per K', qualunque sia L (96 , b). Ed inoltre, quando L coincida con T, questa retta sarà una delle tangenti nel punto doppio per la corrispondente curva K'.

(b) Essendo o una cuspide per C'', le prime polari, relative a questa curva, di tutt' i punti di L passano per o ed ivi toccano T (74 , c); e fra esse ve n' ha una, la prima polare di o, per la quale questo punto è una cuspide e T è la relativa tangente cuspidale. Inoltre, la prima polare di o rispetto a C passa anch' essa per o ed ivi tocca la medesima retta T. Dunque (51 , e), qualunque sia L, la curva K'' ha una cuspide in o, e la tangente cuspidale è T.

Ma se L coincide con T, le prime polari de' punti di L relative a C'' hanno un punto doppio in o (78 , a), mentre le prime polari de' medesimi punti rispetto a C passano semplicemente per o (70); ond' è che quella curva K'', che corrisponde ad L coincidente con T, ha un punto triplo in o (52).

(c) Così è reso manifesto che le curve K' hanno in o un punto doppio, mentre le curve K'' hanno ivi una cuspide, e T è la comune tangente cuspidale. Ne consegue (52) che o è un punto quadruplo per la complessiva curva d' ordine $4(m-1)$ generata dai due fasci projettivi delle K', K'', e che due de' quattro rami passanti per o sono ivi toccati dalla retta T. Gli altri due rami sono toccati in o dalle tangenti della curva K' corrispondente a quella curva K'' che ha in o un punto triplo (52, a). La curva K'', per la quale o è un punto triplo, corrisponde ad L coincidente con T (b), epperò corrisponde appunto a quella curva K' che ha un ramo toccato in o dalla retta T (a). Dunque tre delle quattro tangenti nel punto quadruplo o della curva complessiva d' ordine $4(m-1)$ sono sovrapposte in T.

La curva d' ordine $4(m-1)$ è composta della Jacobiana delle tre curve date e della prima polare di o rispetto a C. Questa prima polare passa una volta per o ed ivi ha per tangente T; dunque la Jacobiana passa tre volte per o e due de' suoi rami sono ivi toccati dalla retta T. Ossia:

(d) Data una rete di curve aventi un punto comune o ed ivi la stessa tangente T, la curva Hessiana della rete ha tre rami passanti per o, due de' quali sono ivi tangenti alla retta T.

98. Supposte date di nuovo tre curve C, C', C'', i cui ordini siano rispettivamente m, m', m'', cerchiamo di quale ordine sia il luogo di un punto nel quale concorrano le rette polari di uno stesso polo rispetto alle tre curve date. Sia L una retta arbitraria, i un punto qualunque di essa; se per i devono passare le rette polari relative a C, C', il polo o sarà una delle $(m-1)(m'-1)$ intersezioni delle prime polari di i rispetto a quelle due curve. Se per o dee passare anche la prima polare relativa a C'', il polo di essa sarà nella retta polare di o rispetto a questa curva; e le rette

polari degli $(m-1)(m'-1)$ punti o incontreranno L in altrettanti punti i'.

Assunto invece ad arbitrio un punto i' in L, se per esso dee passare la retta polare relativa a C'', il polo è nella prima polare di i' rispetto alla detta curva; la quale prima polare è una curva K dell' ordine $m''-1$. Le rette polari dei punti di K relative a C inviluppano una curva della classe $(m-1)(m''-1)$ (81), ed analogamente le rette polari dei punti di K rispetto a C' inviluppano un' altra curva della classe $(m'-1)(m''-1)$. In queste due curve-inviluppi, a ciascuna tangente dell' una corrisponde una tangente dell' altra, purchè si assumano come corrispondenti quelle tangenti che sono polari di uno stesso punto di K rispetto a C e C'. Dunque (83, a) le intersezioni delle tangenti omologhe formeranno una curva dell' ordine $(m-1)(m''-1)+(m'-1)(m''-1)$, la quale segherà la retta L in altrettanti punti i.

Così a ciascun punto i corrispondono $(m-1)(m'-1)$ punti i', mentre ad ogni punto i' corrispondono $(m-1)(m''-1)+(m'-1)(m''-1)$ punti i. Onde la coincidenza di due punti omologhi i, i' in L avverrà $(m-1)(m'-1)+(m'-1)(m''-1)+(m''-1)(m-1)$ volte; cioè questo numero esprime l' ordine del luogo richiesto. Questa curva passa evidentemente pei punti comuni alle tre curve date, ov' esse ne abbiano.

(a) Quando le tre curve date siano dello stesso ordine m, ad esse ponno sostituirsi altre tre curve della rete da quelle individuata, senza che venga a mutarsi il luogo dianzi considerato. Questo, che in tal caso è dell' ordine $3(m-1)^2$, può chiamarsi la *Steineriana della rete* (88, d).

(b) Data una rete di curve d' ordine m, ogni punto p della curva Hessiana è il polo d' infinite rette polari relative alle curve della rete, le quali rette concorrono in uno stesso punto o (95) della Steineriana. In questo modo, a ciascun punto dell' Hessiana corrisponde un punto della Steineriana e reciprocamente; quindi la retta che unisce due punti corrispondenti inviluppa una terza curva della classe $3(m-1)+3(m-1)^2=3m(m-1)$ (83, b).

Ogni retta passante per o è adunque polare del punto p rispetto ad una curva delle rete. Del resto, se la retta polare passa pel polo, questo giace nella curva fondamentale, che è ivi toccata dalla retta polare medesima. Ne segue che la retta op tocca in p una curva della rete; ma tutte le curve della rete che passano per p si toccano ivi fra loro (92), dunque la comune tangente di queste curve è op.

Art. XVI. Formole di Plücker.

99. Data una curva qualsivoglia C_n (fondamentale), indichiamo con

n l' ordine della medesima,
m la classe,
δ il numero de' punti doppi,
$\varkappa$ il numero de' punti stazionari o cuspidi,
τ il numero delle tangenti doppie,
ι il numero delle tangenti stazionarie, ossia de' flessi.

Siccome m è il numero delle tangenti che da un punto arbitrario si possono condurre alla curva data, così, in virtù del teorema (74, c) o (87, d), si ha:

1) $$m = n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa,$$

formola che somministra la classe di una curva, quando se ne conosca l' ordine e si sappia di quanti punti doppi e cuspidi è fornita.

Pel principio di dualità, un' equazione della stessa forma dovrà dare l' ordine di una curva, quando se ne conosca la classe, il numero delle tangenti doppie e quello delle stazionarie (82); dunque:

2) $$n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota.$$

100. Siccome ogni punto della curva fondamentale, il quale abbia per conica polare il sistema di due rette, è un flesso o un punto multiplo (80), così la curva Hessiana, la quale è il luogo de' punti le cui coniche polari si risolvono in coppie di rette (90, a), sega la linea data nei flessi e ne' punti multipli di questa. Onde, essendo l' Hessiana dell' ordine $3(n-2)$, se la curva data non ha punti multipli, il numero de' suoi flessi è $3n(n-2)$ (*).

Supponiamo ora che C_n abbia un punto doppio d; nel qual caso tutte le prime polari passano per d. Allora l' Hessiana della rete formata da queste prime polari, che è anche l' Hessiana di C_n (90, a; 92), passa due volte per d ed ivi ha le due tangenti comuni colla prima polare del punto stesso (96, d), cioè ha le tangenti comuni colla curva data (72). Dunque il punto d equivale (32) a *sei* intersezioni dell' Hessiana con C_n; ossia ogni punto doppio fa perdere a questa curva sei flessi.

Ora s' imagini che C_n abbia una cuspide d, e sia T la tangente cuspidale. In questo caso tutte le prime polari relative a C_n passano per d ed ivi sono toccate dalla retta T (74, c); epperò l' Hessiana ha tre rami passanti per d, due de' quali hanno per tangente T (97, d). Dunque il punto d equivale ad *otto* intersezioni dell' Hessiana con C_n, ossia ogni cuspide fa perdere a questa curva otto flessi (**).

Quindi, se C_n ha δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, il numero de' flessi ossia delle tangenti stazionarie sarà dato dalla formola:

3) $$\iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\varkappa.$$

E pel principio di dualità, se una curva della classe m ha τ tangenti doppie ed ι tangenti stazionarie, essa avrà

4) $$\varkappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota$$

punti stazionari.

Le quattro equazioni così trovate equivalgono però a tre sole indipenden-

---

(*) Plücker, *System der analytischen Geometrie*, Berlin 1835, p. 264. — Hesse, *Ueber die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung* (Giornale di Crelle, t. 28, Berlino 1844, p. 104).

(**) Cayley, *Recherches sur l' élimination et sur la théorie des courbes* (Giornale di Crelle, t. 34, Berlino 1847, p. 43).

ti; infatti, sottraendo la 1) moltiplicata per 3 dalla 3), si ha la

5) $$\varkappa - \iota = 3(n - m),$$

equazione che può essere dedotta nello stesso modo anche dalle 2), 4).

Così fra i sei numeri n, m, δ, $\varkappa$, τ, ι si hanno tre equazioni indipendenti, onde, dati tre, si possono determinare gli altri tre. Per esempio, dati n, δ, $\varkappa$, il valore di τ si ottiene eliminando m ed ι fra le 1), 2), 3); e si ha:

6) $$\tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (2\delta + 3\varkappa)(n^2 - n - 6) + 2\delta(\delta - 1) + \frac{9}{2}\varkappa(\varkappa - 1) + 6\delta\varkappa.$$

Una formola assai utile si ottiene sottraendo la 2) dalla 1), ed eliminando $\varkappa - \iota$ dal risultato mediante la 5):

7) $$2(\delta - \tau) = (n - m)(n + m - 9).$$

Queste importanti relazioni fra l' ordine, la classe e le singolarità di una curva piana sono state scoperte dal sig. Plücker (*).

101. Se una curva deve avere un punto doppio, senza che questo sia dato, ciò equivale ad *una condizione*; infatti, a tal uopo basta che tre prime polari (non appartenenti ad uno stesso fascio) abbiano un punto comune. Invece, se la curva deve avere un punto stazionario, senza che questo sia dato, ossia se tre prime polari (non appartenenti ad uno stesso fascio) debbono toccarsi in uno stesso punto, ciò esige *due condizioni*. Onde segue che, se una curva d' ordine n deve avere δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, essa sarà determinata (34) da $\frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2\varkappa$ condizioni. E, in virtù del principio di dualità, $\frac{m(m+3)}{2} - \tau - 2\iota$ condizioni determineranno una curva della classe m la quale debba essere fornita di τ tangenti doppie e di ι tangenti stazionarie.

Perciò, se i numeri n, m, δ, $\varkappa$, τ, ι competono ad una sola e medesima curva, dovrà essere:

8) $$\frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2\varkappa = \frac{m(m+3)}{2} - \tau - 2\iota,$$

formola che può dedursi anche dalle 1), 2) .... Ma, ove sia stabilita *a priori*, come qui si è fatto, essa insieme con due qualunque delle 1), 2), ... potrà servire a somministrare tutte le altre (**).

102. Noi prenderemo quind' innanzi a studiare le proprietà di una curva C_n di un dato ordine n, la quale supporremo affatto generale fra quelle dello stesso ordine. Epperò, a meno che non si facciano dichiarazioni in contrario,

(*) *Theorie der algeb. Curven*, p. 211.
(**) Salmon, *Higher plane curves*, p. 92.

la curva fondamentale sarà della classe $n(n-1)$ ed avrà nessun punto multiplo, $3n(n-2)$ flessi e $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ tangenti doppie.

Le prime polari relative a C_n formano una rete dell'ordine $n-1$, l'Hessiana della quale taglia C_n ne' $3n(n-2)$ flessi di questa. La Steineriana della rete (98, a), che è anche la Steineriana di C_n (88, d), è dell'ordine $3(n-2)^2$.

Art. XVII. Curve generate dalle polari, quando il polo si muova con legge data.

103. Se un punto, considerato come polo rispetto alla curva fondamentale C_n, percorre un' altra curva data C_m d'ordine m, la retta polare inviluppa una curva K, la quale abbiamo già trovato (81) essere della classe $m(n-1)$. Le tangenti che da un punto qualunque o si possono condurre a K sono le rette polari degli $m(n-1)$ punti, ne' quali C_m è intersecata dalla prima polare di o.

(a) Se o è tal punto che la sua prima polare sia tangente a C_m, due rette polari passanti per o sono coincidenti, cioè o è un punto della curva K (30); questa è dunque il luogo geometrico de' poli le cui prime polari toccano C_m. Questa proprietà ci mette in grado di trovare l' ordine di K, cioè il numero de' punti in cui K è incontrata da una retta arbitraria L. Le prime polari de' punti di L formano un fascio (77); onde, supposto che C_m abbia δ punti doppi, e $\varkappa$ cuspidi, vi saranno $m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa)$ punti in L, le cui prime polari sono tangenti a C_m (87, c). Dunque K è dell' ordine $m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa)$.

È poi evidente che le tangenti stazionarie di K sono le rette polari de' punti stazionari di C_m; donde segue che K ha $\varkappa$ flessi.

Conoscendo così la classe, l' ordine ed il numero de' flessi della curva K, mediante le formole di Plücker (99, 100) troveremo che essa ha inoltre: $\frac{1}{2}\left[m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa)\right]^2-m(5m+6n-21)+10\delta+\frac{27}{2}\varkappa$ punti doppi, $3m(m+n-4)-(6\delta+8\varkappa)$ cuspidi e $\frac{1}{2}m(n-2)(mn-3)+\delta$ tangenti doppie.

(b) È manifesto che ogni punto doppio di K è il polo di una prima polare tangente a C_m in due punti distinti; che ogni cuspide di K è il polo di una prima polare avente con C_m un contatto tripunto; e che ogni tangente doppia di K è una retta avente o due poli distinti sulla curva C_m, o due poli riuniti in un punto doppio di questa curva.

Siccome le proprietà del sistema delle prime polari (relative a C_n) valgono per una rete qualsivoglia di curve, così da quanto precede si raccoglie:

1.° Il numero delle curve d' una rete d' ordine $n-1$, le quali abbiano doppio contatto con una data linea d' ordine m, fornita di δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, è

$$\frac{1}{2}\left[m(m+2n-5)-(2\delta+3\varkappa)\right]^2-m(5m+6n-21)+10\delta+\frac{27}{2}\varkappa.$$

2.° Il numero delle curve della stessa rete aventi coll' anzidetta linea d' ordine m un contatto tripunto è $3m(m+n-4)-(6\delta+8\varkappa)$ (*).

(c) Ogni punto della curva K è polo di una prima polare tangente a C_m; onde considerando le intersezioni delle curve K e C_m, si ha:

In una curva C_m dell' ordine m, dotata di δ punti doppi e di $\varkappa$ cuspidi, vi sono $m^2(m+2n-5)-m(2\delta+3\varkappa)$ punti, le cui prime polari relative alla curva fondamentale C_n toccano la medesima C_m.

Di qui per $m=1$ si ricava:

In una retta qualunque vi sono $2(n-2)$ punti, le cui prime polari relative alla curva fondamentale C_n toccano la retta medesima.

Se la retta è tangente a C_n, nel contatto coincidono due di quei $2(n-2)$ poli. Dunque in una retta tangente a C_n esistono $2(n-3)$ punti, ciascun de' quali è polo di una prima polare tangente in altro punto alla retta medesima.

(d) Se nella ricerca superiore, la curva C_m si confonde con C_n, la linea K si compone evidentemente della C_n medesima e delle sue tangenti stazionarie, perchè ogni punto di quella e di queste è polo di una prima polare tangente alla curva fondamentale (71, 80). In tal caso, i punti doppi di K sono le intersezioni delle tangenti stazionarie fra loro e colla curva C_n; le cuspidi di K sono rappresentate dai flessi di C_n, ciascuno contato due volte; e le tangenti doppie di K sono le stazionarie e le doppie di C_n.

I punti doppi di K sono (b) i poli d' altrettante prime polari doppiamente tangenti alla curva fondamentale. Ed invero: se o è un punto comune a due tangenti stazionarie di questa, la prima polare di o tocca C_n ne' due flessi corrispondenti (80); e se o è un punto di segamento di C_n con una sua tangente stazionaria, la prima polare di o tocca C_n in o (71) e nel punto di contatto di questa tangente (80). Sonvi adunque $3n(n-2)(n-3)$ prime polari doppiamente tangenti a C_n, i cui poli giacciono in C_n medesima; e vi sono altre $\frac{3}{2}n(n-2)\big(3n(n-2)-1\big)$ prime polari pur doppiamente tangenti, i cui poli sono fuori di C_n.

(e) La curva K, inviluppo delle polari $(n-1)^{me}$ de' punti di C_m, si chiamerà l' $(n-1)^{ma}$ polare di C_m.

Facendo $m=1$, troviamo che l' $(n-1)^{ma}$ polare di una retta R, cioè l' inviluppo delle rette polari de' punti di R, od anche il luogo de' poli delle prime polari tangenti ad R, è una curva della classe $n-1$ e dell' ordine $2(n-2)$, con $3(n-3)$ cuspidi, $2(n-3)(n-4)$ punti doppi ed $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ tangenti doppie; cioè:

Vi sono $3(n-3)$ prime polari, per le quali una data retta R è una tangente stazionaria; $2(n-3)(n-4)$ prime polari, per le quali R è una tangente doppia; ed inoltre

(*) Bischoff, *l. c.* p. 174-176.

$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ rette, ciascuna delle quali ha due poli in R.

(f) Se l' $(n-1)^{ma}$ polare della retta R passa per un dato punto o, questo è il polo di una prima polare tangente ad R (e); talchè se l' $(n-1)^{ma}$ polare varia girando intorno al punto fisso o, la retta R inviluppérà la prima polare di o. Così abbiamo due definizioni della prima polare di un punto:

La prima polare di un punto o è il luogo de' poli le cui $(n-1)^{me}$ polari s' incrociano in o, ed è anche l' inviluppo delle rette le cui $(n-1)^{me}$ polari passano per o.

104. Supposto che un polo p percorra una data curva C_m d' ordine m, avente δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, di qual indice è la *serie* (34) generata dalla polare $(r)^{ma}$ di p rispetto alla linea fondamentale C_n, e quale ne sarà l' inviluppo?

(a) Se la polare $(r)^{ma}$ di p passa per un punto o, il polo sarà nella polare $(n-r)^{ma}$ di o (69, a), cioè sarà una delle rm intersezioni di questa polare colla proposta curva C_m. Dunque per o passano rm polari $(r)^{me}$ di punti situati in C_m, cioè le polari $(r)^{me}$ de' punti di C_m formano una serie d' indice rm.

(b) Se l' $(n-r)^{ma}$ polare di o tocca in un punto C_m, avremo in o due $(r)^{me}$ polari coincidenti, ossia o sarà un punto della linea inviluppata dalle curve della serie anzidetta. Dunque:

L' inviluppo delle polari $(r)^{me}$ de' punti di una curva C_m è anche il luogo de' poli delle polari $(n-r)^{me}$ tangenti a C_m.

(c) Quale è l' ordine di questo luogo? Ovvero, quanti punti vi sono in una retta arbitraria L, le polari $(n-r)^{me}$ de' quali tocchino C_m? Le polari $(n-r)^{me}$ de' punti di una retta L formano (a) una serie d' ordine r e d' indice $n-r$; epperò (87, c) ve ne sono $(n-r)\{m(m+2r-3)-(2\delta+3\varkappa)\}$ che toccano C_m. Donde segue che:

L' inviluppo delle polari $(r)^{me}$ de' punti di una curva d' ordine m, dotata di δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, è una linea dell' ordine $(n-r)\{m(m+2r-3)-(2\delta+3\varkappa)\}$.

Questa linea si denominerà polare $(r)^{ma}$ della data curva C_m rispetto alla curva fondamentale C_n (*).

(d) Fatto $r=1$ ed indicata con m' la classe di C_m, cioè posto $m'=m(m-1)-(2\delta+3\varkappa)$ (99), si ha:

La prima polare di una curva della classe m', cioè il luogo de' poli delle rette tangenti di questa, è una linea dell' ordine $m'(n-1)$.

Questa linea passa pei punti ove la curva fondamentale è toccata dalle tangenti comuni ad essa ed alla curva della classe m'.

Se $m'=1$, ricadiamo nella definizione della prima polare di un punto (103, f).

(e) Posto $m=1$, troviamo che la polare $(r)^{ma}$ di una retta è

(*) Steiner, *l. c.* p. 2-3.

una linea dell' ordine $2(r-1)(n-r)$. Quindi la prima polare di una retta è dell' ordine *zero*; infatti essa è costituita dagli $(n-1)^2$ poli della retta data (77).

Per $r=n-1$, si ricade in un risultato già ottenuto (103, e).

(f) L' ordine della linea polare $(r)^{ma}$ di una retta R si può determinare direttamente come segue. A tal uopo consideriamo quella linea come luogo de' punti comuni a due curve successive della serie d' indice r e d' ordine $n-r$, formata dalle polari $(r)^{me}$ de' punti di R (34).

Se a è un punto qualunque di R, le polari $(r)^{me}$ passanti per a hanno i loro rispettivi poli nella polare $(n-r)^{ma}$ di a, la quale sega R in r punti a'. Se invece assumiamo ad arbitrio un punto a', la sua polare $(r)^{ma}$ sega R in $n-r$ punti a; talchè, riferiti i punti a, a' ad una stessa origine o, fra i segmenti oa, oa' avrà luogo un' equazione del grado r in oa' e del grado $n-r$ in oa. Il punto a apparterrebbe alla linea cercata, se due delle r polari $(r)^{me}$ passanti per esso fossero coincidenti. Ma la condizione perchè l' equazione anzidetta dia due valori eguali per oa' è del grado $2(r-1)$ rispetto ai coefficienti della medesima, e per conseguenza del grado $2(r-1)(n-r)$ rispetto ad oa. Sono adunque $2(r-1)(n-r)$ i punti comuni al luogo richiesto ed alla retta R; ossia l' inviluppo delle polari $(r)^{me}$ de' punti di una retta data è una linea dell' ordine $2(r-1)(n-r)$.

Le stesse considerazioni si possono applicare, in molti casi, alla ricerca dell' ordine della linea che inviluppa le curve d' una data serie. Per esempio, se la serie è d' indice r e d' ordine s, e se si può assegnare una punteggiata projettiva alla serie (cioè se fra le curve della serie e i punti di una retta si può stabilire tale corrispondenza che ad ogni punto della retta corrisponda una curva della serie, e viceversa), l' inviluppo sarà dell' ordine $2(r-1)s$. Di qui per $s=1$ si ricava:

Se una curva della classe r è tale che si possa assegnare una punteggiata projettiva alla serie delle sue tangenti, l' ordine della curva è solamente $2(r-1)$.

(g) Se la polare $(n-r)^{ma}$ di una retta passa per un dato punto o, questo è (b) il polo di una polare $(r)^{ma}$ tangente a quella retta. Dunque:

La polare $(r)^{ma}$ di un punto o, ossia il luogo de' punti le cui $(n-r)^{me}$ polari passano per o, è anche l' inviluppo delle rette le polari $(n-r)^{me}$ delle quali contengono il punto o.

Così le polari de' punti e delle linee sono definite in doppio modo, e come luoghi e come inviluppi. Egli è appunto in questa doppia definizione che sembra risiedere il segreto della grande fecondità della teoria delle curve polari.

(h) La polare $(r)^{ma}$ di una curva C tocchi un' altra curva C' nel punto o. In o quella polare toccherà la polare $(r)^{ma}$ di un punto o' di C; e viceversa (b) in o' la curva C sarà toccata dalla polare $(n-r)^{ma}$ di o. Ma la polare $(r)^{ma}$ di o' tocca in o anche C'; dunque la polare $(n-r)^{ma}$ di o toccherà in o' la polare $(n-r)^{ma}$ di C'; ossia:

Se la polare $(r)^{ma}$ di una curva C tocca un' altra curva C', reciprocamente la polare $(n-r)^{ma}$ di C' tocca C.

(k) Una retta R sia l' $(r-1)^{ma}$ polare di un punto o rispetto

all' $(n-r)^{ma}$ polare di un altro punto o', ovvero, ciò che è la medesima cosa (69, c), la polare $(n-r)^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(r-1)^{ma}$ di o. Se R varia ed inviluppa una curva qualunque C, restando fisso il punto o', il luogo del punto o sarà (d) la prima polare di C rispetto all' $(n-r)^{ma}$ polare di o'. Se invece resta fisso il punto o, mentre R inviluppa la curva C, il luogo di o' sarà la prima polare di C rispetto all' $(r-1)^{ma}$ polare di o'. Dunque:

Se la prima polare di una curva C rispetto all' $(r-1)^{ma}$ polare di un punto o passa per un altro punto o', la prima polare di C rispetto all' $(n-r)^{ma}$ polare di o' passerà per o; e viceversa.

105. L' $(n-1)^{ma}$ polare di una curva C_m d' ordine m è (81) una linea K della classe $m(n-1)$. Reciprocamente, la prima polare di K sarà (104, d) una linea dell' ordine $m(n-1)^2$. Questa linea comprende in sè la data curva C_m, perchè K è non solo l' inviluppo delle rette polari dei punti di C_m, ma anche il luogo de' poli delle prime polari tangenti a C_m (103, a). Dunque, allorchè un punto o percorre la curva C_m, gli altri $(n-1)^2-1$ poli della retta polare di o descriveranno una linea dell' ordine $m(n-1)^2-m = mn(n-2)$.

A questo risultato si arriva anche cercando la soluzione del problema: quando un punto o percorre una data linea, quale è il luogo degli altri poli della retta polare di o?

Supposto dapprima che la data linea sia una retta R, cerchiamo in quanti punti essa seghi il luogo richiesto. Siccome (103, e) vi sono $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ rette, ciascuna delle quali ha due poli in R, così gli $(n-2)(n-3)$ poli di tali rette sono altrettanti punti del luogo. Inoltre ricordiamo (90, b) che in ogni punto dell' Hessiana coincidono due poli d' una medesima retta, talchè le $3(n-2)$ intersezioni dell' Hessiana con R sono comuni al luogo di cui si tratta. Questo luogo ha dunque $(n-2)(n-3)+3(n-2)$ punti comuni con R, vale a dire, esso è dell' ordine $n(n-2)$.

Se invece è data una linea C_m dell' ordine m, assunta un' arbitraria retta R, cerchiamo quante volte avvenga che una stessa retta abbia un polo in R ed un altro in C_m. I poli congiunti ai punti di R sono, come or si è dimostrato, in una linea dell' ordine $n(n-2)$, la quale sega C_m in $mn(n-2)$ punti. Dunque vi sono $mn(n-2)$ punti in C_m, ciascun de' quali ha un polo congiunto in R; ossia:

Se un polo descrive una curva d' ordine m, il luogo degli altri poli congiunti è una linea dell' ordine $mn(n-2)$.

106. Imaginiamo un polo che si muova percorrendo una data curva C_m d' ordine m; quale sarà il luogo delle intersezioni della prima colla seconda polare del polo mobile, rispetto alla curva fondamentale C_n? Assunta una retta arbitraria R, se per un punto i di essa passa una prima polare, il polo giace nella retta polare di i; questa retta sega C_m in m punti, le seconde polari dei quali incontreranno R in $m(n-2)$ punti i'. Se invece si assume ad arbitrio in R un punto i' pel quale debba passare una seconda polare, il polo sarà nella conica polare di i', che taglia C_m in $2m$ punti; le prime polari di questi

determinano in R $2m(n-1)$ punti i. Così vediamo che ad ogni punto i corrispondono $m(n-2)$ punti i', mentre ad ogni punto i' corrispondono $2m(n-1)$ punti i; talchè (83) vi saranno (in R) $m(n-2)+2m(n-1)=m(3n-4)$ punti i, ciascun de' quali coincida con uno de' corrispondenti i'; cioè il luogo richiesto è una curva U dell' ordine $m(3n-4)$. Evidentemente questa curva tocca C_n negli mn punti comuni a C_m e C_n, perchè in ciascuno di questi punti le polari prima e seconda si toccano fra loro e toccano C_n (71).

Inoltre, siccome per un flesso della curva fondamentale passa la prima e la seconda polare di ogni punto della relativa tangente stazionaria (80), così la curva U passerà pel flesso di C_n tante volte quanti sono i punti comuni a C_m ed alla tangente stazionaria. Dunque la curva U passa m volte per ciascuno dei $3n(n-2)$ flessi di C_n (*).

(a) Se C_m coincide con C_n, la linea U contiene manifestamente due volte la curva fondamentale; prescindendo da questa, rimarrà una curva dell' ordine $3n(n-2)$, per la quale i flessi di C_n sono punti $(n-2)^{pli}$. Dunque, se un polo percorre la curva fondamentale, gli $(n-1)(n-2)-2$ punti in cui si segano le polari prima e seconda generano una linea dell'ordine $3n(n-2)$, avente $n-2$ branche passanti per ciascun flesso di C_n, una delle quali ha ivi con C_n un contatto tripunto. Il che riesce evidente, considerando che ogni tangente stazionaria della curva fondamentale ha con questa $n-2$ punti comuni, cioè il flesso ed $n-3$ intersezioni semplici.

(b) Analogamente si dimostra che, se il polo percorre la curva C_m, le intersezioni delle polari $(r)^{ma}$ ed $(s)^{ma}$ descrivono una linea dell' ordine $mn(r+s)-2mrs$, la quale tocca la curva fondamentale ne' punti comuni a questa ed a C_m. È da notarsi che il numero $mn(r+s)-2mrs$ non cambia sostituendo $n-r$, $n-s$ ad r, s.

Art. XVIII. Applicazione alle curve di second' ordine.

107. Se ne' teoremi generali suesposti si fa $n=2$, si ottengono i più interessanti risultati per la teoria delle coniche.

Dato un polo o nel piano della curva fondamentale C_2 di second' ordine, il luogo del punto coniugato armonico di o, rispetto alle due intersezioni della curva con una trasversale mobile intorno ad o, è la *retta polare* di o (68). Se la polare di o passa per un altro punto o', viceversa (69, a) la polare di o' contiene o; ossia tutte le rette passanti per un punto dato hanno i loro poli nella retta polare di questo punto, e reciprocamente tutt' i punti di una data retta sono poli di rette incrociantisi nel polo della data.

Siccome ogni punto ha una determinata retta polare, e viceversa ogni retta ha un polo unico, così i punti di una retta costituiscono una punteggiata projettiva alla stella formata dalle loro ri-

(*) Clebsch, *Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren* Giornale Crelle-Borchardt, t. 58, Berlino 1861, p. 279).

spettive polari. Donde segue che il rapporto anarmonico di quattro rette divergenti da un punto è eguale al rapporto anarmonico dei loro poli (*).

La retta polare di un punto o sega la conica fondamentale ne' punti in cui questa è toccata da rette uscenti da o (70).

Considerando la conica fondamentale come una curva di seconda classe, se da un punto qualunque di una retta data si tirano le due tangenti alla curva, la retta coniugata armonica della data, rispetto a queste due tangenti, passa per un punto fisso (82) che è il polo della retta data.

Due figure, l' una delle quali contenga i poli e le polari delle rette e dei punti dell' altra, diconsi *polari reciproche*. Sui pochi principii or dichiarati si fonda il celebre metodo di PONCELET (**) per passare dalle proprietà dell' una a quelle dell' altra figura.

108. Due punti o, o', l' un de' quali giaccia nella polare dell' altro, diconsi *poli coniugati*. Le infinite coppie di poli coniugati esistenti in una trasversale formano un' involuzione (quadratica), i cui punti doppi sono le intersezioni della conica colla trasversale; cioè i punti della conica fondamentale sono coniugati a sè medesimi.

Le polari di due poli coniugati, ossia due rette passanti ciascuna pel polo dell' altra, diconsi *coniugate*. Le infinite coppie di polari coniugate passanti per uno stesso punto dato formano un' involuzione (quadratica), i raggi doppi della quale sono le tangenti che dal punto dato si possono condurre alla conica; cioè le tangenti di questa sono rette coniugate a sè medesime.

(a) Due poli coniugati ed il polo della retta che li unisce (ovvero due rette coniugate e la polare del punto ad esse comune) individuano un triangolo (o un trilatero), nel quale ciascun lato è la polare del vertice opposto. Siffatto triangolo o trilatero dicesi *coniugato* alla conica data.

(b) Se da un punto p si conducono due trasversali a segare la conica data ne' quattro punti bc, ad, e se q, r sono le intersezioni delle coppie di rette (ca, bd), (ab, cd), la retta qr sarà la polare del punto p: anzi nel triangolo pqr ciascun vertice è polo del lato opposto. Ciò è una immediata conseguenza della proprietà armonica del quadrangolo completo $abcd$ (5). Dunque tutte le coniche circoscritte a questo quadrangolo sono coniugate al triangolo formato dai punti diagonali pqr.

(b') Se per due punti di una data retta P si tirano quattro tangenti BC, AD alla conica data, e se Q, R sono le rette passanti per le coppie di punti (CA, BD) (AB, CD), il punto QR sarà il polo della retta P; anzi nel trilatero PQR ciascun lato è la polare del vertice opposto, come segue immediatamente dalla proprietà armonica del quadrilatero completo $ABCD$ (5). Dunque tutte le coniche inscritte nel quadrilatero sono coniugate al trilatero formato dalle diagonali PQR.

(c) In generale (89), se un punto ha la stessa retta polare rispetto a due curve d' un fascio, esso è doppio per una curva del fascio medesimo. Ciò torna a dire che due coniche non ammettono alcun triangolo coniugato comune, oltre quello che ha i vertici ne' tre punti doppi del fascio da esse determinato; ossia i punti diagonali del quadrangolo completo formato dai punti comuni a due coniche, e le rette diagonali del quadrilatero completo formato

(*) CHASLES, *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science etc.* (Mémoires couronnés par l' Académie R. de Bruxelles, t. 11, 1837, p. 582).

(**) PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822, p. 122. — *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques* Giornale di CRELLE, t. 4, Berlino 1829, p. 1.

dalle tangenti comuni alle stesse coniche sono i vertici e i lati dell' unico triangolo coniugato ad entrambe le curve.

(d) Il teorema di Pascal relativo ad un esagono inscritto in una conica (45, c), se si assume il secondo vertice infinitamente vicino al primo, ed il quinto al quarto, somministra la seguente relazione fra quattro punti di una conica e le tangenti in due di essi:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica, le tangenti in due vertici concorrono sulla retta che unisce due punti diagonali.

Donde si conclude facilmente che le diagonali del quadrilatero formato da quattro tangenti di una conica sono i lati del triangolo avente per vertici i punti diagonali del quadrangolo formato dai quattro punti di contatto.

(e) Se di un quadrangolo completo $abcd$ sono dati i tre punti diagonali pqr ed un vertice a, il quadrangolo è determinato ed unico. Infatti, il vertice b è il coniugato armonico di a rispetto ai punti in cui pq, pr segano ar; ecc. Dunque le coniche passanti per uno stesso punto a e coniugate ad un dato triangolo pqr formano un fascio, ossia (92):

Tutte le coniche coniugate ad un dato triangolo formano una rete.

(f) Le curve di questa rete che dividono armonicamente un dato segmento oo' formano un fascio. Infatti, se i è un punto arbitrario, tutte le coniche della rete passanti per i hanno altri tre punti comuni, epperò incontrano la retta oo' in coppie di punti in involuzione (49). Ma anche le coppie di punti che dividono armonicamente oo' costituiscono un' involuzione (25, a), e le due involuzioni hanno una coppia comune di punti coniugati; dunque per i passa una sola conica della rete, la quale sodisfaccia alla condizione richiesta, c. d. d. In altre parole, la rete contiene un fascio di coniche, rispetto a ciascuna delle quali i punti oo' sono poli coniugati.

In una rete due fasci hanno sempre una curva comune; dunque, se si cerca la conica della rete rispetto alla quale il punto o sia coniugato sì ad o' che ad o'', cioè o abbia per polare $o'o''$, il problema ammette una sola soluzione; vale a dire: vi è una sola conica, rispetto alla quale un dato triangolo sia coniugato, e un dato punto sia polo di una data retta.

(g) Siano pqr, $p'q'r'$ due triangoli coniugati alla conica fondamentale; s, t i punti in cui le rette $p'q'$, $p'r'$ segano qr; s', t' quelli ove $q'r'$ è incontrata dalle pq, pr. Le polari de' punti q, r, s, t sono evidentemente le rette $p(r, q, r', q')$, che incontrano $q'r'$ in t', s', r' q'. Ma il sistema di queste quattro rette e quello de' loro poli hanno lo stesso rapporto anarmonico (107), dunque:

$$(qrst) = (t's'r'q'),$$

ossia (1):

$$(qrst) = (s't'q'r');$$

vale a dire, le quattro rette pq, pr, $p'q'$, $p'r'$ incontrano le qr, $q'r'$ in due sistemi di quattro punti aventi lo stesso rapporto anarmonico. Dunque (60) i sei lati dei due triangoli proposti formano un esagono di Brianchon. Inoltre i due fasci di quattro rette $p'(q, r, q', r')$, $p(q, r, q', r')$ hanno lo stesso

rapporto anarmonico, onde (59) i sei vertici de' triangoli medesimi costituiscono un esagono di Pascal (*). Ossia:

Se due triangoli sono circoscritti ad una conica, essi sono inscritti in un' altra; e viceversa;

Affinchè due triangoli siano coniugati ad una stessa conica, è necessario e sufficiente che essi siano circoscritti ad un' altra conica, ovvero inscritti in una terza conica.

Questa proprietà si può esprimere eziandio dicendo che la conica tangente a cinque de' sei lati di due triangoli coniugati ad una conica data tocca anche il sesto; e la conica determinata da cinque vertici passa anche pel sesto. Donde s' inferisce che:

Se una conica tocca i lati di un triangolo coniugato ad una seconda conica, infiniti altri triangoli coniugati a questa saranno circoscritti alla prima; cioè le tangenti condotte alle due coniche dal polo (relativo alla seconda) di ciascuna retta tangente alla prima formeranno un fascio armonico.

Se una conica passa pei vertici di un triangolo coniugato ad un' altra conica, sarà pur circoscritta ad infiniti altri triangoli coniugati alla medesima; cioè ogni punto della prima conica sarà, rispetto alla seconda, il polo di una retta segante le due curve in quattro punti armonici.

109. Le coniche circoscritte ad un quadrangolo *abcd* sono segate da una trasversale arbitraria in coppie di punti che formano un' involuzione (49). Fra quelle coniche vi sono tre paja di rette: dunque le coppie di lati opposti (bc, ad), (ca, bd), (ab, cd) del quadrangolo incontrano la trasversale in sei punti $a'a_1$, $b'b_1$, $c'c_1$ accoppiati involutoriamente. Viceversa, se i lati di un triangolo *abc* sono segati da una trasversale ne' punti $a'b'c'$, e se questi sono accoppiati in involuzione coi punti $a_1b_1c_1$ della stessa trasversale, le tre rette aa_1, bb_1, cc_1 concorreranno in uno stesso punto d.

Sia or dato un triangolo *abc*, i cui lati bc, ca, ab seghino una trasversale in a', b', c'; e sia inoltre data una conica, rispetto alla quale i punti a_1, b_1, c_1 situati nella stessa trasversale siano poli coniugati ordinatamente ad a', b', c'. Le tre coppie di punti $a'a_1$, $b'b_1$, $c'c_1$ sono in involuzione (108), epperò le rette aa_1, bb_1, cc_1 passano per uno stesso punto d. Se di più si suppone che a, b siano poli ordinatamente coniugati ad a', b', le polari di a', b' sono le rette aa_1, bb_1, talchè il polo della trasversale sarà il punto d. Dunque la polare di c' è cc_1, ossia anche i punti c, c' sono poli coniugati. Abbiamo così il teorema:

Se i termini di due diagonali aa', bb' d' un quadrilatero completo formano due coppie di poli coniugati rispetto ad una data conica, anche i termini della terza diagonale cc' sono coniugati rispetto alla medesima conica (**).

110. Se un polo percorre una data curva C_m dell' ordine m, avente δ punti doppi e $\varkappa$ cuspidi, la retta polare (relativa alla conica fondamentale C_2)

(*) Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlin 1832, p. 308 (Aufg. 46). — Chasles, *Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques* (Journal de M. Liouville, aout 1838, p. 396).

(**) Hesse, *De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis* (Dissertatio pro venia legendi), Regiomonti 1840, p. 17.

inviluppa una seconda curva della classe m, dotata di δ tangenti doppie e $\varkappa$ flessi, la quale è anche il luogo dei poli delle rette tangenti a C_m (103). Le due curve diconsi *polari reciproche*.

(a) Se la conica fondamentale C_2 è il sistema di due rette concorrenti in un punto i, la polare d'ogni punto o passa per i, ed invero essa è la coniugata armonica di oi rispetto al pajo di rette costituenti la conica (73, b); ma la polare del punto i è indeterminata (72), cioè qualunque retta nel piano può essere considerata come polare di i. Donde segue che ogni retta passante per i ha infiniti poli tutti situati in un'altra retta passante per i, mentre una retta non passante per i ha per unico polo questo punto.

Perciò se è data una curva della classe r, considerata come inviluppo di rette, la sua polare reciproca, ossia il luogo dei poli delle sue tangenti, sarà il sistema di r rette passanti per i e ordinatamente coniugate armoniche (rispetto alle due rette onde consta C_2) di quelle r tangenti che si possono condurre da i alla curva data.

(a') Se la conica fondamentale C_2, risguardata come inviluppo di seconda classe, è una coppia di punti oo', il polo di ogni retta R giace nella retta oo', e questa è divisa armonicamente dal polo e dalla polare. Però il polo della retta oo' è indeterminato, cioè qualunque punto del piano può essere assunto come polo di quella retta. Ond'è che ogni punto della retta oo' ha infinite polari tutte incrociantisi in un altro punto della medesima retta; mentre un punto qualunque esterno alla oo' non ha altra polare che questa retta.

Dunque, se è data una curva dell'ordine r, la sua polare reciproca, cioè l'inviluppo delle polari de' suoi punti, è il sistema di r punti situati in linea retta con oo', i quali sono, rispetto a questi due, i coniugati armonici di quelli ove la curva data incontra la retta oo'.

(b) Nell'ipotesi (a) è evidente che ogni trilatero coniugato avrà un vertice in i, e due lati formeranno un sistema armonico colle due rette costituenti la conica fondamentale. Viceversa, se un trilatero dato è coniugato ad una conica che sia un pajo di rette, queste dovranno tagliarsi in un vertice e formare un fascio armonico con due lati del trilatero medesimo; e in particolare, un lato di questo, considerato come il sistema di due rette coincidenti, terrà luogo di una conica coniugata al trilatero. Per conseguenza, le tre rette costituenti il trilatero contengono i punti doppi delle coniche ad esso coniugate, ossia (92; 108, e) l'Hessiana della rete formata dalle coniche coniugate ad un trilatero dato è il trilatero medesimo.

111. In virtù del teorema generale (110), la polare reciproca di una conica K rispetto ad un'altra conica C_2 è una terza conica K'; le due curve K, K' avendo tra loro tal relazione che le tangenti di ciascuna sono le polari dei punti dell'altra rispetto a C_2. Ne' quattro punti comuni a K, la conica fondamentale C_2 è toccata dalle quattro tangenti comuni a K'; dunque (108, d) le tre coniche C_2, K, K' sono coniugate ad uno stesso triangolo.

(a) Se R è la polare di un punto r rispetto a K, e se r', R' sono il polo e la polare di R, r rispetto a C_2, è evidente che r' sarà il polo di R' rispetto a K'.

(b) I punti comuni a K, K' sono i poli, rispetto a C_2, delle tangenti comuni alle medesime coniche. Donde segue che, se più coniche sono circoscritte ad uno stesso quadrangolo, le loro polari reciproche saranno inscritte in uno stesso quadrilatero. E siccome le prime coniche sono incontrate da una trasversale arbitraria in coppie di punti formanti un'involuzione, così le tangenti condotte da un punto qualunque alle coniche inscritte in un quadrilatero sono pur accoppiate involutoriamente.

(c) Se sono date *a priori* entrambe le coniche K, K', le quali si seghino ne' punti $abcd$ ed abbiano le tangenti comuni $ABCD$, la conica rispetto alla quale K, K' sono polari reciproche dovrà essere coniugata (111) al triangolo formato dai punti diagonali del quadrangolo $abcd$ e dalle diagonali del quadrilatero $ABCD$ (108, c). Per determinare completamente questa conica, basterà aggiungere la condizione che il punto a sia, rispetto ad essa, il polo di una delle quattro rette $ABCD$ (108, f). Donde segue esservi quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali due coniche date sono polari reciproche.

(d) Date due coniche K, K', la prima di esse sia circoscritta ad un triangolo pqr coniugato alla seconda. Se C_2 è una conica rispetto a cui le date siano polari reciproche, e se le rette PQR sono le polari de' punti pqr rispetto a C_2, il trilatero PQR sarà circoscritto a K'. Ma il triangolo pqr è supposto coniugato a K'; dunque (a) il trilatero PQR sarà coniugato a K. Ossia:

Se una conica è circoscritta ad un triangolo coniugato ad una seconda conica, viceversa questa è inscritta in un trilatero coniugato alla prima; e reciprocamente (*).

Quindi, avuto riguardo al doppio enunciato (108, g):

Se una conica è inscritta in un triangolo coniugato ad un' altra conica (ossia, se questa è circoscritta ad un triangolo coniugato a quella), la polare reciproca della seconda conica rispetto alla prima è l' inviluppo di una retta che tagli armonicamente le due coniche date; e la polare reciproca della prima rispetto alla seconda è il luogo di un punto dal quale tirate le tangenti alle due coniche date, si ottenga un fascio armonico.

(e) In generale, date due coniche K, K', proponiamoci le seguenti quistioni (**):

Quale è l' inviluppo di una retta che seghi le coniche date in quattro punti armonici? quante rette dotate di tale proprietà passano per un punto qualunque, ex. gr. per uno de' punti $abcd$ comuni alle coniche date? Affinchè una retta condotta per a seghi K, K' in quattro punti armonici, tre di questi dovranno coincidere in a, cioè le sole tangenti che per a si possano condurre all' inviluppo richiesto sono le due rette che ivi toccano l' una o l' altra conica. Dunque l' inviluppo è una conica F tangente alle otto rette che toccano in $abcd$ le curve date.

Di queste otto rette, le quattro che toccano K' sono anche tangenti (111) alla conica H, polare reciproca di K rispetto a K'; ossia le coniche K', H, F sono inscritte nello stesso quadrilatero. Dunque,

Quale è il luogo di un punto dal quale si possa condurre un fascio armonico di tangenti alle coniche date? quanti punti dotati di questa proprietà esistono in una retta qualunque, ex. gr. in una delle tangenti $ABCD$ comuni alle coniche date? È evidente che le sole intersezioni della retta A col luogo di cui si tratta sono i punti in cui la retta medesima tocca l' una o l' altra conica data. Il luogo richiesto è dunque una conica F' passante per gli otto punti in cui le curve date sono toccate dalle loro tangenti comuni.

Di questi otto punti, i quattro situati in K appartengono anche alla conica H', polare reciproca di K' rispetto a K; vale a dire, le coniche K, H', F' appartengono ad uno stesso fascio. Dunque, se un punto

(*) Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, Leipzig 1861, p. 715.
(**) Staudt, *Ueber die Kurven 2. Ordnung*, Nürnberg 1831, p. 25.

se una tangente di H, non comune a K', sega armonicamente K, K', le coniche H, F coincidono. Ciò accade quando K è circoscritta ad un triangolo coniugato a K' (d).

di H', non comune a K, è centro d' un fascio armonico di rette tangenti a K, K', le coniche H', F' si confondono in una sola. Ciò accade quando K' è inscritta in un triangolo coniugato a K (d).

Se C_2 è una conica rispetto alla quale K, K' siano polari reciproche, evidentemente le coniche F, F' (come pure H, H') sono polari reciproche rispetto a C_2.

(f) Siano K, K', K'' tre coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo *abcd*, e le prime due siano separatamente circoscritte a due triangoli coniugati ad una medesima conica C_2. Le coniche H, H', H'', polari reciproche di quelle prime tre rispetto a C_2, saranno tutte toccate dalle rette $ABCD$, polari de' punti *abcd* rispetto a C_2 (b). Dunque (d) la retta A sega armonicamente sì le due coniche C_2, K, che le due C_2, K'; cioè le intersezioni di C_2 con A sono i punti doppi dell' involuzione (quadratica) che le coniche del fascio (KK') determinano sopra A. Di qui si trae che A taglia armonicamente anche C_2, K'', ossia (e):

Se in due coniche sono separatamente inscritti due triangoli coniugati ad una conica data, qualunque altra conica descritta pei punti comuni alle prime due sarà pur circoscritta ad un triangolo coniugato alla conica data.

Art. XIX. Curve descritte da un punto, le indicatrici del quale variino con legge data.

112. Riprendendo il caso generale d' una curva fondamentale C_n d' ordine qualsivoglia n, cerchiamo di condurre per un dato punto p una retta che tocchi ivi la prima polare d' alcun punto o della retta medesima (*). Le prime polari passanti per p hanno i loro poli nella retta polare di questo punto. Se inoltre p dev' essere il punto di contatto della prima polare con una tangente condotta dal polo o, anche la seconda polare di o dovrà passare per p (70); talchè o sarà una delle intersezioni della retta polare colla conica polare di p, cioè po dev' essere tangente alla conica polare di p.

Dunque le rette che risolvono il problema sono le due tangenti che da p si possono condurre alla conica polare di questo punto, ossia le due *indicatrici* del punto p (90, c).

(a) Se p è un punto dell' Hessiana, la sua conica polare è un pajo di rette incrociantisi nel corrispondente punto o della Steineriana, pel quale passa anche la retta polare di p. I punti di questa retta sono poli di altrettante prime polari passanti per p ed ivi aventi una comune tangente (90, a); donde segue che questa è un' indicatrice del punto p. Ma le indicatrici di p sono insieme riunite nella retta po (90, c); dunque (98, b):

La retta che unisce un punto dell' Hessiana al cor-

(*) Clebsch, *l. c.* p. 280-285,

rispondente punto della Steineriana tocca nel primo di questi punti tutte le prime polari passanti per esso.

Ond'è che la linea della classe $3(n-1)(n-2)$, inviluppo delle tangenti comuni ne' punti di contatto fra le prime polari (91, b), può anche essere definita come l' inviluppo delle rette che uniscono le coppie di punti corrispondenti dell' Hessiana e della Steineriana (98, b).

(b) Data una retta R, in essa esistono $2(n-2)$ punti, ciascun dei quali, o, è il polo d'una prima polare tangente ad R in un punto p (103, c); epperò in una retta qualunque vi sono $2(n-2)$ punti, per ciascuno de' quali essa è un' indicatrice.

Se R è una tangente della curva fondamentale, nel punto di contatto sono riuniti due punti o ed i due corrispondenti punti p.

113. Quale è il luogo del punto p, se una delle sue indicatrici passa per un punto fisso i? Ciascuna retta condotta per i contiene $2(n-2)$ posizioni del punto p (112, b); ed i rappresenta altri due punti p, corrispondenti alle due indicatrici dello stesso punto i. Dunque il luogo richiesto è una curva L^{ii} dell' ordine $2(n-2)+2=2(n-1)$, che passa due volte per i.

Considerando una tangente della curva fondamentale, nel punto di contatto sono riuniti due punti p; dunque la linea L^{ii} tocca C_n negli $n(n-1)$ punti di contatto delle tangenti condotte a questa dal punto i.

Quando il polo o (112) prende il posto del punto i, le $(n-1)(n-2)$ intersezioni della prima colla seconda polare di i sono altrettante posizioni del punto p. Viceversa, se p è nella seconda polare di i, la conica polare di p passa per i; ma i dee giacere in una tangente condotta da p alla conica polare di quest' ultimo punto, dunque anche la retta polare di p passerà per i, e conseguentemente p giacerà nella prima polare di i. Quegli $(n-1)(n-2)$ punti sono pertanto i *soli* che la curva L^{ii} abbia comuni colla seconda polare di i; ond'è che in tutti quei punti le due curve si toccano. Concludiamo adunque che la curva L^{ii} tocca la curva fondamentale e la seconda polare del punto i ovunque le incontra, e gli $n(n-1)+(n-1)(n-2)$ punti di contatto giacciono tutti nella prima polare di i.

Siccome la prima polare di i presa due volte può considerarsi come una linea dell' ordine $2(n-1)$, e siccome la curva fondamentale e la seconda polare di i costituiscono insieme un' altra linea dello stesso ordine; così (41) per i $2(n-1)^2$ punti, ne' quali la prima polare di i sega C_n e la seconda polare, si può far passare un fascio di curve dell' ordine $2(n-1)$, ciascuna delle quali tocchi la curva fondamentale e la seconda polare di i in tutti quei punti. Fra le infinite curve di questo fascio, quella che passa per i è L^{ii}.

114. Di qual classe è l' inviluppo delle indicatrici dei punti di una data curva C_m d' ordine m? Ossia, quanti punti di questa curva hanno un' indicatrice passante per un punto i fissato ad arbitrio? Il luogo di un punto p, un' indicatrice del quale passi per i, è (113) una curva dell' ordine $2(n-1)$, che segherà C_m in $2m(n-1)$ punti; dunque in i concorrono $2m(n-1)$ tangenti dell' inviluppo richiesto.

Si noti poi che quest' inviluppo tocca la curva fondamentale ovunque essa è incontrata da C_m; e ciò perchè ciascuna di queste intersezioni ha le sue indicatrici confuse insieme nella relativa tangente di C_n. Dunque:

Le indicatrici dei punti di una linea d' ordine m inviluppano una linea della classe $2m(n-1)$, che tocca la curva fondamentale ne' punti ove questa è incontrata dalla linea d' ordine m.

(a) Di qui per $m=1$ si ricava che le indicatrici dei punti di una retta data inviluppano una curva della classe $2(n-1)$, la quale tocca in $2(n-2)$ punti la retta medesima, perchè questa è indicatrice di $2(n-2)$ suoi punti (112, b).

(b) In virtù del teorema generale or dimostrato, se il punto p percorre l' Hessiana che è una curva dell' ordine $3(n-2)$, le indicatrici di p inviluppano una linea della classe $6(n-1)(n-2)$; ma siccome in questo caso, per ogni posizione di p le due indicatrici si confondono in una retta unica (90, c), così la classe dell' inviluppo si ridurrà a $3(n-1)(n-2)$: risultato già ottenuto altrimenti (91, b; 112, a).

A quest' inviluppo arrivano $3(n-1)(n-2)$ tangenti da ogni dato punto i: onde ciascuno dei $3(n-1)(n-2)$ punti p dell' Hessiana, le indicatrici de' quali sono le anzidette tangenti, rappresenta due intersezioni dell' Hessiana colla curva L^i superiormente determinata (113).

Riunendo questa proprietà colle altre già dimostrate (113), si ha l' enunciato:

Dato un punto i, il luogo di un punto p tale che la retta pi sia tangente alla conica polare di p è una linea dell' ordine $2(n-1)$, che passa due volte per i e tocca la curva fondamentale, l' Hessiana e la seconda polare di i ovunque le incontra.

115. Cerchiamo ora di determinare l' ordine del luogo di un punto p, un' indicatrice del quale sia tangente ad una data curva K_r della classe r, cioè indaghiamo quanti punti sianvi in una retta R, dotati di un' indicatrice tangente a K_r. Se il punto p si muove nella retta R, le sue indicatrici inviluppano (114, a) una linea della classe $2(n-1)$, la quale avrà $2r(n-1)$ tangenti comuni colla data curva K_r. Dunque il luogo richiesto è dell' ordine $2r(n-1)$.

Se consideriamo una tangente comune a K_r ed a C_n, nel contatto con quest' ultima linea sono riuniti due punti p, pei quali la tangente fa l' ufficio d' indicatrice: donde s' inferisce che il luogo richiesto tocca la curva fondamentale negli $rn(n-1)$ punti ove questa è toccata dalle tangenti comuni a K_r, ovvero (ciò che è la stessa cosa) ne' punti in cui la curva fondamentale è incontrata dalla prima polare di K_r (104, d).

La curva K_r ha $3r(n-1)(n-2)$ tangenti comuni coll' inviluppo delle indicatrici dei punti dell' Hessiana; talchè $3r(n-1)(n-2)$ è il numero dei punti comuni all' Hessiana ed al luogo dell' ordine $2r(n-1)$, di cui qui si tratta. Dunque:

Il luogo di un punto dal quale tirate le tangenti alla sua conica polare, una di queste riesca tangente ad una data curva della classe r, è una linea dell' ordine $2r(n-1)$ che tocca la curva fondamentale e l' Hessiana ovunque le incontra.

116. Dati due punti fissi i, j, cerchiamo il luogo di un punto p tale

che le rette pi, pj siano polari coniugate (108) rispetto alla conica polare di p. È evidente che questo luogo passa per i e per j.

Sia R una retta condotta ad arbitrio per j, e p un punto di R. Le rette polari di p, i rispetto alla conica polare di p incontrino R ne' punti a, b; i quali se coincidessero in un punto solo, questo sarebbe il polo della retta pi relativamente alla detta conica, talchè si avrebbe in p un punto del luogo richiesto. Assunto ad arbitrio il punto a come intersezione di R con una retta polare, gli corrispondono $n-1$ posizioni del polo p (i punti comuni ad R e alla prima polare di a), e quindi altrettanti punti b. Se invece si assume ad arbitrio b, come incontro di R colla retta polare di i rispetto ad una conica polare indeterminata, il polo p di questa è nella prima polare di i relativa alla prima polare di b (69, d), cioè in una curva d' ordine $n-2$, le intersezioni della quale con R sono le posizioni di p corrispondenti al dato punto b; ond' è che a questo punto corrisponderanno $n-2$ punti a (*). Dunque il numero de' punti p in R, pei quali a e b coincidono, è $(n-1)+(n-2)$; e siccome anche j è un punto della curva cercata, così questa è dell' ordine $(n-1)+(n-2)+1=2(n-1)$. La designeremo con L^j, perchè, ove j coincida con i, essa rientra nella curva L già considerata (113).

Sia p il punto di contatto della curva fondamentale con una tangente uscita da i; la retta polare di p è pi, tangente in p alla conica polare dello stesso punto p, onde, qualunque sia j, la retta pj passa pel polo di pi. Dunque p è un punto di L^j, cioè questa linea passa per gli $n(n-1)$ punti di contatto della curva fondamentale colle tangenti che le arrivano da i; e per la stessa ragione passerà anche per gli $n(n-1)$ punti in cui C_n è toccata da rette condotte per j.

Cerchiamo in quanti e quali punti la curva L^{ij} incontri la prima polare di i relativa alla prima polare di j, la quale chiameremo per brevità *seconda polare mista* de' punti ij. Se questa seconda polare mista passa per p, viceversa (69, d) la retta polare di i rispetto alla conica polare di p passa per j, ossia i punti i, j sono *poli coniugati* (108) relativamente alla conica polare di p. In tal caso, affinchè le rette pi, pj siano polari coniugate rispetto alla medesima conica, basta evidentemente che la retta polare di p passi per i o per j; epperò p dovrà trovarsi o nella prima polare di i o in quella di j. Dunque la curva L^{ij} passa pei punti in cui la seconda polare mista de' punti ij è segata dalle prime polari de' punti medesimi.

Ora siano p, o due punti corrispondenti dell' Hessiana e della Steineriana, tali che la retta po passi per i. Per esprimere che, rispetto alla conica polare di p, le rette pi, pj sono coniugate, basta dire che le rette polari di p e j (relative alla conica) concorrono in un punto di pi. Ma nel caso attuale, la conica polare di p è un pajo di rette incrociantisi in o (90, a), talchè

(*) Variando il punto a nella retta R, la prima polare di a genera un fascio (77), le curve del quale determinano in R un' involuzione del grado $n-1$. Ma ad ogni punto p corrisponde un punto b; dunque, col variare di a, il gruppo de' corrispondenti $n-1$ punti b genera un' involuzione del grado $n-1$. Anche la prima polare di b, rispetto alla prima polare del punto fisso i, quando b varia sopra R, dà luogo ad un fascio; epperò, col variare di b, il gruppo de' corrispondenti $n-2$ punti a genera un' involuzione del grado $n-2$. Dunque, variando simultaneamente i punti a, b producono due involuzioni projettive, l' una del grado $n-2$, l' altra del grado $n-1$. I $2n-3$ punti *comuni* a queste involuzioni (24, b), insieme con j, sono quelli in cui R incontra il richiesto luogo geometrico.

per questo punto passano le polari di p e j (relative alla conica medesima). E siccome anche pi contiene, per ipotesi, il punto o, così p appartiene ad L^{ij}, ossia questa curva passa pei $3(n-1)(n-2)$ punti dell' Hessiana, le cui indicatrici concorrono in i. Analogamente la curva L^{ij} passa anche pei $3(n-1)(n-2)$ punti dell' Hessiana, le indicatrici de' quali partono da j. Dunque:

Dati due punti i, j, il luogo di un punto p, tale che le rette pi, pj siano coniugate rispetto alla conica polare di p, è una linea dell' ordine $2(n-1)$, che passa: 1.° pei punti i, j; 2.° pei punti in cui la curva fondamentale è toccata dalle tangenti condotte per i o per j; 3.° pei punti in cui la prima polare di i (o di j) è toccata da rette concorrenti in j (o in i); 4.° pei punti dell' Hessiana, le indicatrici de' quali convergono ad i o a j.

(a) In altre parole, la linea L^{ij} sega la curva fondamentale e l' Hessiana ne' punti ove queste sono toccate dalle due linee L^{ii}, L^{jj}, che dipendono separatamente dai punti i, j (113).

(b) Se il punto i è dato, mentre j varii descrivendo una retta R, la linea L^{ij} genera un fascio. Infatti, essa passa, qualunque sia j, per $4(n-1)^2$ punti fissi, i quali sono: 1.° il punto i; 2.° gli $n(n-1)$ punti in cui C_n è toccata dalle tangenti che passano per i; 3.° i $3(n-1)(n-2)$ punti dell' Hessiana, le cui indicatrici concorrono in i; 4.° i $2n-3$ punti nei quali (oltre a j che è variabile) R sega L^{ij}; questi ultimi non variano, perchè sono i punti *comuni* a due involuzioni projettive, indipendenti dal punto j (vedi la *nota* a pag. 93).

Questa proprietà si dimostra anche cercando quante curve L^{ij} passino per un dato punto q, quando i sia fisso e j debba trovarsi in una retta R. Siccome le rette qi, qj devono essere coniugate rispetto alla conica polare di q, così il punto j sarà l' intersezione di R colla retta che congiunge q al polo di qi relativo a quella conica. Dunque ecc.

Nello stesso modo si dimostra che, se i è fisso, le curve L^{ij} passanti per uno stesso punto q formano un fascio; cioè per due punti dati q, q' passa una sola curva L^{ij} relativa al punto fisso i; ecc.

117. La precedente ricerca (116) può essere generalizzata, assumendo una curva-inviluppo invece del punto j, od anche una seconda curva invece di i, ovvero una sola curva in luogo del sistema dei due punti.

Data una curva K_r della classe r e dato un punto i, vogliasi determinare il luogo di un punto p tale che la retta pi sia, rispetto alla conica polare di p, coniugata ad alcuna delle tangenti che da p ponno condursi a K_r: ovvero con altre parole, la retta pi passi per alcuno de' punti in cui la retta polare di p taglia la curva polare reciproca di K_r rispetto alla conica polare di p (110).

La curva richiesta passa r volte per i, giacchè se il punto p cade in i, sonvi r rette pi sodisfacenti all' anzidetta condizione: quelle cioè che da i vanno agli r punti in cui la retta polare di p taglia la polare reciproca di K_r (relativa alla conica polare di i).

Sia p un punto di C_n; la retta polare di p sarà la tangente alla curva fondamentale nel punto medesimo. Laonde se questa retta tocca anche K_r, p sarà un punto della polare reciproca di K_r (relativa alla conica polare di p);

e siccome, qualunque sia i, la retta pi passa per p, punto comune alla detta polare reciproca ed alla retta polare di p, così questo punto apparterrà al luogo richiesto. Ond' è che questo luogo contiene gli $rn(n-1)$ punti di contatto della curva fondamentale colle tangenti comuni a K_r.

Se invece p appartiene a C_n e pi è tangente a questa curva in p, la stessa retta pi è la polare di p; ma essa incontra in r punti la polare reciproca di K_r, dunque p è un punto multiplo secondo r per la curva richiesta. Questa ha pertanto $n(n-1)$ punti $(r)^{pli}$, e son quelli ove C_n è toccata da tangenti che concorrono in i.

Sia p un punto dell' Hessiana, o il corrispondente punto della Steineriana. Se po è tangente alla data curva K_r, essa sarà coniugata alla retta pi rispetto alla conica polare di p; infatti, sì quella tangente che le polari dei punti p, i, relative a questa conica, concorrono nel punto o. Donde s' inferisce che p è un punto del luogo che si considera; vale a dire, questo luogo passa pei $3r(n-1)(n-2)$ punti dell' Hessiana, le indicatrici de' quali toccano K_r.

Siano ancora p, o punti corrispondenti dell' Hessiana e della Steineriana; ma po passi per i. Allora, siccome la conica polare di p è un pajo di rette incrociate in o, così la polare reciproca di K_r rispetto a tale conica sarà (110, a) un fascio di r rette concorrenti in o. Ond' è che il punto o rappresenta r intersezioni sì della retta pi che della retta polare di p colla polare reciproca di K_r, e per conseguenza p tien luogo di r punti consecutivi comuni alla curva richiesta ed all' Hessiana. Dunque il luogo geometrico, del quale si tratta, ha un contatto $(r)^{punto}$ coll' Hessiana in ciascuno dei $3(n-1)(n-2)$ punti le cui indicatrici passano per i.

Passiamo da ultimo a determinare l' ordine della curva in questione. Sia R una retta arbitraria condotta per i, e p un punto in R. La retta polare di p incontri R in a, e la polare reciproca di K_r (rispetto alla conica polare di p) seghi R in r punti b. Se si assume ad arbitrio a, vi corrispondono $n-1$ posizioni di p (le intersezioni di R colla prima polare di a) e quindi $r(n-1)$ posizioni di b. Se invece si assume ad arbitrio b, come incontro di R colla polare reciproca di K_r rispetto alla conica polare di un polo indeterminato, questo polo giace (104, k) nella prima polare di K_r relativa alla prima polare di b; la qual curva essendo (104, d) dell'ordine $r(n-2)$ sega R in altrettanti punti p, ed a ciascuno di questi corrisponde un punto a. Così ad ogni punto a corrispondono $r(n-1)$ punti b, ed ogni punto b individua $r(n-2)$ punti a; onde la coincidenza di un punto a con uno dei corrispondenti punti b avverrà $r(n-1)+r(n-2)$ volte. Ma ove tale coincidenza si verifichi, il punto p appartiene alla curva cercata. Questa ha dunque $r(2n-3)$ punti in R, oltre al punto i che è multiplo secondo r; vale a dire, essa è dell' ordine $2r(n-1)$.

(a) Analogamente si dimostra che:

Date due curve K_r, K_s, le cui classi siano r, s, il luogo di un punto p tale che due tangenti condotte per esso, l' una a K_r, l' altra a K_s, siano coniugate rispetto alla conica polare dello stesso punto p, è una linea dell' ordine $2rs(n-1)$, la quale 1.° passa s volte per ciascuno degli $rn(n-1)$ punti in cui la curva fondamentale C_n è toccata da rette tangenti di K_r; 2.° passa r volte per ciascuno degli $sn(n-1)$ punti in cui C_n è toccata da

rette tangenti di K_s; 3.° ha coll' Hessiana un contatto $(s)^{punto}$ in ciascuno dei $3r(n-1)(n-2)$ punti le cui indicatrici toccano K_r; 4.° ha coll'Hessiana medesima un contatto $(r)^{punto}$ in ciascuno dei $3s(n-1)(n-2)$ punti le indicatrici dei quali sono tangenti a K_s.

(b) Se invece è dato un solo inviluppo K_r della classe r, e si cerca il luogo di un punto p tale che due tangenti condotte da esso a K_r siano coniugate rispetto alla conica polare di p, si trova una linea dell' ordine $rn(r-1)(n-1)$, la quale passa $r-1$ volte per ciascuno degli $rn(n-1)$ punti ove la curva fondamentale è toccata da rette tangenti di K_r, ed ha un contatto $(r-1)^{punto}$ coll' Hessiana in ciascuno de' $3r(n-1)(n-2)$ punti di questa curva, le indicatrici de' quali toccano K_r.

Art. XX. Alcune proprietà della curva Hessiana e della Steineriana.

118. Sia p un punto dell' Hessiana ed o il corrispondente punto della Steineriana. L' ultima polare di p è una retta passante per o, i punti della quale sono poli d' altrettante prime polari toccate in p dalla retta po; ma fra esse ve n' ha una dotata d' un punto doppio in p, e il suo polo è o (88, d; 90, a; 112, a).

(a) Siano o, o' due punti della Steineriana; i poli della retta oo' saranno le $(n-1)^2$ intersezioni delle prime polari di quei due punti, le quali hanno rispettivamente per punti doppi i corrispondenti punti p, p' dell' Hessiana. Assumendo o' infinitamente vicino ad o, la retta oo' ossia la tangente in o alla Steineriana avrà un polo in p; dunque le tangenti della Steineriana sono le rette polari dei punti dell' Hessiana. Ovvero (90, b):

La Steineriana è l' inviluppo di una retta che abbia due poli coincidenti.

(b) Questo teorema ci mena a determinare la classe della Steineriana. Le tangenti condotte a questa curva da un punto arbitrario i hanno i loro poli nella prima polare di i, e questa sega l' Hessiana in $3(n-1)(n-2)$ punti. Dunque la Steineriana è della classe $3(n-1)(n-2)$.

(c) Siccome i flessi della curva fondamentale C_n sono punti dell' Hessiana (100), così le rette polari dei medesimi, cioè le tangenti stazionarie di C_n, sono anche tangenti della Steineriana.

I punti della Steineriana che corrispondono ai flessi di C_n, considerati come punti dell' Hessiana, giacciono nelle tangenti stazionarie della curva fondamentale; queste tangenti adunque toccano anche la curva della classe $3(n-1)(n-2)$, inviluppo delle indicatrici dei punti dell'Hessiana (114, b).

(d) Secondo il teorema generale (103), l' $(n-1)^{ma}$ polare dell' Hessiana, cioè l' inviluppo delle rette polari de' punti dell' Hessiana, è una curva K della classe $3(n-1)(n-2)$ e dell' ordine $3(n-2)(5n-11)$, della quale fa parte la Steineriana.

Se i è l' intersezione di due rette tangenti alla Steineriana, ciascuna di esse ha un polo nell' Hessiana, e per questi due poli passa la prima polare di i. Se le due tangenti vengono a coincidere, i due poli si confondono in

un sol punto, nel quale l' Hessiana sarà toccata dalla prima polare di i; epperò quest' ultimo sarà un punto dell' $(n-1)^{ma}$ polare dell' Hessiana, riguardata come il luogo dei poli delle prime polari tangenti all' Hessiana medesima. Ma i punti i, ne' quali può dirsi che coincidano due successive tangenti della Steineriana, sono, oltre ai punti di questa curva, quelli situati in una qualunque delle tangenti stazionarie della curva medesima. Per conseguenza la linea K, $(n-1)^{ma}$ polare dell' Hessiana, è composta della Steineriana e delle tangenti stazionarie di questa. Ossia, la Steineriana ha $3(n-2)(5n-11)-3(n-2)^2=3(n-2)(4n-9)$ tangenti stazionarie.

Della Steineriana conosciamo così l' ordine $3(n-2)^2$, la classe $3(n-1)(n-2)$ ed il numero $3(n-2)(4n-9)$ de' flessi. Onde, applicandovi le formole di Plücker (99, 100), troveremo che la Steineriana ha $12(n-2)(n-3)$ cuspidi, $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ punti doppi e $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$ tangenti doppie.

Se al numero delle cuspidi s' aggiunge due volte quello de' flessi, se al numero delle tangenti doppie si aggiunge quello delle stazionarie, e se il numero de' punti doppi è sommato col numero de' punti in cui le tangenti stazionarie segano la Steineriana e si segano fra loro; si ottengono rispettivamente i numeri delle cuspidi, delle tangenti doppie e de' punti doppi della complessiva curva K d' ordine $3(n-2)(5n-11)$, $(n-1)^{ma}$ polare dell' Hessiana, in accordo coi risultati generali (103).

119. Sia oo' una retta tangente alla Steineriana; o il punto di contatto; p il corrispondente punto dell' Hessiana. Le prime polari dei punti di oo' formano un fascio di curve, che si toccano fra loro in p, avendo per tangente comune po. Fra le curve di questo fascio ve n' ha una, la prima polare di o, per la quale p è un punto doppio, e ve ne sono altre $3(n-2)^2-2$, cioè le prime polari de' punti in cui oo' sega la Steineriana, le quali hanno un punto doppio altrove.

(a) Se oo' è una tangente doppia della Steineriana; o, o' i punti di contatto; p, p' i corrispondenti punti dell' Hessiana; allora le prime polari di tutti i punti di oo' si toccheranno fra loro sì in p che in p'. Dunque (118, d):

In una rete geometrica di curve d' ordine $n-1$, vi sono $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$ fasci, in ciascuno dei quali le curve si toccano fra loro in due punti distinti.

(b) Se nella tangente doppia oo' i punti di contatto si riuniscono in o, per modo che essa divenga una tangente stazionaria della Steineriana, anche i punti pp' si confonderanno in un solo, e le prime polari dei punti di oo' avranno fra loro un contatto tripunto in p, punto doppio della prima polare del flesso o.

Inoltre quelle prime polari toccano in p l' Hessiana, perchè le tangenti stazionarie della Steineriana fanno parte (118, d) del luogo de' poli delle

prime polari tangenti all' Hessiana. Donde segue che, se o è un flesso della Steineriana e p è il punto doppio della prima polare di o, la retta po è tangente all' Hessiana in p.

Così è anche dimostrato che in una rete geometrica di curve d' ordine $n-1$, v' hanno $3(n-2)(4n-9)$ fasci, in ciascun de' quali le curve hanno fra loro un contatto tripunto, cioè si osculano in uno stesso punto.

120. Consideriamo una prima polare dotata di due punti doppi p, p', e sia o il polo di essa. Condotta per o una retta arbitraria R, le prime polari dei punti di R formano un fascio, nel quale trovansi $3(n-2)^2$ punti doppi (88), cioè i $3(n-2)^2$ punti comuni ad R ed alla Steineriana sono i poli d' altrettante prime polari dotate di un punto doppio. Ma, siccome due punti doppi esistono già nella prima polare di o, così quel fascio avrà solamente $3(n-2)^2-2$ altre curve dotate di un punto doppio; donde s' inferisce che R taglia la Steineriana non più che in $3(n-2)^2-2$ punti, oltre ad o, cioè o è un punto doppio della Steineriana.

Quando R prenda la posizione di P retta polare di p, le prime polari dei suoi punti passano tutte per p, epperò questo punto conta per *due* fra i $3(n-2)^2$ punti doppi del fascio (88, a). I punti p, p' equivalendo così a *tre* punti doppi, il fascio conterrà soltanto altre $3(n-2)^2-3$ curve aventi un punto doppio; e ciò torna a dire che la retta P non ha che $3(n-2)^2-3$ punti comuni colla Steineriana, oltre ad o. Questo punto equivale dunque a tre intersezioni della curva con P; e lo stesso può ripetersi per P' retta polare di p'.

Per conseguenza: se una prima polare ha due punti doppi p, p', il suo polo o è un punto doppio della Steineriana, la quale è ivi toccata dalle rette polari di p, p'.

Ed avuto riguardo al numero de' punti doppi della Steineriana (118, d), si conclude:

In una rete geometrica dell' ordine $n-1$, vi sono $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ curve, ciascuna delle quali ha due punti doppi (*).

121. Imaginisi ora una prima polare dotata di una cuspide p, e siane o il polo. Una retta qualunque R condotta per o determina un fascio di prime polari, una delle quali ha una cuspide in p; perciò il numero di quelle dotate di un punto doppio (88, b) sarà $3(n-2)^2-2$. Dunque R incontra la Steineriana in due punti riuniti in o.

Ma se si considera la retta P polare di p, le curve prime polari dei suoi punti passano tutte per p, e fra esse ve n' ha soltanto $3(n-2)^2-3$, che siano dotate di un punto doppio (88, c). Cioè il punto o rappresenta tre intersezioni della retta P colla Steineriana; ed è evidente che tale proprietà è esclusiva alla retta P.

Dunque: se una prima polare ha una cuspide p, il suo

(*) Steiner, *l. c.* p. 4-5.

polo o è una cuspide della Steineriana, la quale ha ivi per tangente la retta polare di p (*).

Ed in causa del numero delle cuspidi della Steineriana (118, d):

In una rete geometrica dell' ordine $n-1$, vi sono $12(n-2)(n-3)$ curve, ciascuna delle quali è dotata di una cuspide.

122. Una curva C_m d' ordine m incontri l' Hessiana in $3m(n-2)$ punti; le rette polari di questi punti saranno tangenti sì all' $(n-1)^{ma}$ polare di C_m (103, e) che alla Steineriana (118, a). Sia p uno di quei punti, ed o quello in cui la Steineriana è toccata dalla retta polare di p. La prima polare di o ha un punto doppio in p, onde ha ivi due punti coincidenti comuni con C_m; dunque, siccome l' $(n-1)^{ma}$ polare di C_m è il luogo dei poli delle prime polari tangenti a C_m (103), così o è un punto di questa $(n-1)^{ma}$ polare. Ossia:

L' $(n-1)^{ma}$ polare di una data curva d' ordine m tocca la Steineriana in $3m(n-2)$ punti, che sono i poli d' altrettante prime polari aventi i punti doppi nelle intersezioni della curva data coll' Hessiana.

Se $m=1$, abbiamo:

Una retta arbitraria R sega l' Hessiana in $3(n-2)$ punti, che sono doppi per altrettante prime polari; i poli di queste sono i punti di contatto fra la Steineriana e l' $(n-1)^{ma}$ polare di R.

Ed è evidente che:

Se R è una tangente ordinaria dell' Hessiana, l' $(n-1)^{ma}$ polare di R avrà colla Steineriana un contatto quadripunto e $3n-8$ contatti bipunti.

Se R è una tangente stazionaria dell' Hessiana, l' $(n-1)^{ma}$ polare di R avrà colla Steineriana un contatto sipunto e $3(n-3)$ contatti bipunti.

E se R è una tangente doppia dell' Hessiana, l' $(n-1)^{ma}$ polare di R avrà colla Steineriana due contatti quadripunti e $3n-10$ contatti bipunti.

Art. XXI. Proprietà delle seconde polari.

123. La prima polare di un punto o rispetto alla prima polare di un altro punto o', ossia, ciò che è la medesima cosa (69, c), la prima polare di o' rispetto alla prima polare di o, si è da noi chiamata per brevità (116) *seconda polare mista* de' punti oo'. Avuto riguardo a questa denominazione, la seconda polare del punto o, cioè la prima polare di o rispetto alla prima polare di o (69, b) può anche chiamarsi *seconda polare pura* del punto o.

Se la seconda polare mista de' punti oo' passa per un punto a, la retta polare di o relativa alla conica polare di a passa per o' (69, d); dunque (108):

La seconda polare mista di due punti oo' è il luogo di un punto rispetto alla conica polare del quale i punti oo' siano poli coniugati.

Ond' è che, data una retta R, se in essa assumonsi due punti oo' i quali

(*) Steiner enunciò che la Steineriana (da lui chiamata *Kerncurve*) ha $12(n-2)(n-3)$ cuspidi (G. di Crelle, t. 47, p. 4). Poi Clebsch, avendo trovato lo stesso numero di polari cuspidate, sospettò che i poli di queste fossero le cuspidi della Steineriana, e dimostrò questa proprietà pel caso di $n=4$ (*Ueber Curven vierter Ordnung*, Giornale Crelle-Borchardt, t. 59, Berlino 1861, p. 131).

siano coniugati rispetto alla conica polare di un punto a, la seconda polare mista di oo' passerà per a. Le coppie di punti in R, coniugati rispetto alla conica suddetta, formano un' involuzione i cui punti doppi ef sono le intersezioni della conica colla retta (108). I punti ef sono pertanto i poli di due seconde polari pure passanti per a.

Di qui s' inferisce che, affinchè una seconda polare mista, i cui poli oo' giacciano in R, passi per a, è necessario e sufficiente che oo' dividano armonicamente il segmento ef; vale a dire: se $oo'ef$ sono quattro punti armonici, la seconda polare mista di oo' passa pei poli di tutte le coniche polari contenenti i punti ef. Ora, quando una conica polare passa per due punti ef, il suo polo giace sì nella seconda polare pura di e che in quella di f (69, a); gli $(n-2)^2$ punti comuni a queste due seconde polari sono poli d' altrettante coniche polari passanti per ef, epperò sono anche punti comuni a tutte le seconde polari miste che passano per a ed hanno i poli in R.

Dunque le seconde polari miste passanti per un punto dato e aventi i poli in una data retta formano un fascio d' ordine $n-2$.

Se una seconda polare mista i cui poli giacciano in R dee passare per due punti ab, essa è pienamente e in modo unico determinata. I punti di R, coniugati a due a due rispetto alla conica polare di a, formano un' involuzione; ed una seconda involuzione nascerà dal punto b. I punti coniugati comuni alle due involuzioni (25, b) sono i poli della seconda polare mista richiesta.

Concludiamo adunque che *le seconde polari pure e miste i cui poli giacciano in una data retta formano una rete geometrica dell' ordine* $n-2$. Inoltre, le seconde polari pure dei punti della retta data formano una serie d' indice 2; cioè per un punto arbitrario a passano due seconde polari pure i cui poli giacciono nella retta data (e nella conica polare di a). E il luogo de' punti doppi delle seconde polari pure e miste de' punti della retta data, cioè l' Hessiana della rete anzidetta, è una curva dell' ordine $3(n-3)$ (92).

124. Abbiamo or ora osservato che per due punti ef della data retta R passano $(n-2)^2$ coniche polari, i poli delle quali sono le intersezioni delle seconde polari pure di e, f. Se questi due punti s' avvicinano indefinitamente sino a coincidere in uno solo f, avremo $(n-2)^2$ coniche polari tangenti in f alla retta R, e i loro poli saranno le intersezioni della seconda polare pura di f con quella del punto infinitamente vicino in R, vale a dire, saranno altrettanti punti di contatto della seconda polare pura di f colla seconda polare della retta data (la curva inviluppo delle seconde polari pure de' punti di R, ossia il luogo de' poli delle coniche polari tangenti ad R (104)).

Si è inoltre notato che, se $oo'ef$ sono quattro punti armonici (in R), la seconda polare mista di oo' passa per le $(n-2)^2$ intersezioni delle seconde polari pure di e, f. Ora, supposto che ef coincidano in un sol punto f, anche uno degli altri due (sia o') cadrà in f (4); dunque la seconda polare mista di due punti of in R passa per gli $(n-2)^2$ punti in cui la seconda polare pura di f tocca la seconda polare di R. Ossia:

La curva d' ordine $2(n-2)$, *seconda polare di una retta* R, *tocca in* $(n-2)^2$ *punti la seconda polare pura di un punto qualunque* o *di* R. *I* $2(n-2)^2$ *punti in cui la seconda polare di* R *è toccata dalle seconde polari pure di*

due punti o, o' di R, giacciono tutti in una stessa curva d' ordine $n-2$, che è la seconda polare mista de' punti oo'.

(a) Di qui si può dedurre che la seconda polare di una retta ha, rispetto alle seconde polari pure e miste de' punti di questa retta, tutte le proprietà e relazioni che una conica possiede rispetto alle rette che la toccano o la segano.

(b) Nè questo importante risultato è proprio ed esclusivo alle curve seconde polari, ma appartiene ad una rete qualsivoglia. Data una rete geometrica di curve d' ordine m, fra queste se ne assumano infinite formanti una serie d' indice 2: il loro inviluppo sarà una linea tangente a ciascuna curva inviluppata negli m^2 punti in cui questa sega l' inviluppata successiva. Ma per un punto arbitrario passano solamente due inviluppate: anzi queste coincidono, se il punto è preso nella linea-inviluppo. Donde segue che l' inviluppo non può incontrare un' inviluppata senza toccarla; e siccome queste due linee si toccano in m^2 punti, così l' inviluppo delle curve della serie proposta è una linea dell' ordine $2m$.

Tutte le curve di una rete, passanti per uno stesso punto, formano un fascio. Ora, i punti di contatto fra l' inviluppo ed un' inviluppata nascono dall' intersecarsi di questa coll' inviluppata successiva: dunque essi costituiranno la base d' un fascio di curve della rete. Ossia tutte le curve della rete, passanti per un punto ove l' inviluppo sia tangente ad una data inviluppata, passano anche per gli altri m^2-1 punti di contatto fra l' inviluppo e l' inviluppata medesima.

Per due punti in cui l' inviluppo sia toccato da due inviluppate differenti passa una sola curva della rete. Ond' è che una curva qualunque, la quale appartenga bensì alla rete ma non alla serie, intersecherà la linea-inviluppo in $2m^2$ punti, ove questa è toccata da due curve della serie.

(c) Ritornando alla seconda polare della retta R, gli $(n-2)^2$ punti di contatto fra questa curva e la seconda polare pura di un punto o di R compongono la base di un fascio di seconde polari miste, i cui poli sono o ed un punto variabile in R. Se due di quei punti di contatto coincidano in un solo, le curve del fascio avranno ivi la tangente comune, e per una di esse quel punto sarà doppio (47). Questo punto apparterrà dunque alla curva Hessiana della rete formata dalle seconde polari pure e miste dei punti di R (123). Ossia in ciascuna delle $6(n-2)(n-3)$ intersezioni di quest' Hessiana colla seconda polare di R, quest' ultima curva ha un contatto quadripunto con una seconda polare pura (il cui polo è in R), la quale tocca la medesima curva in altri $(n-2)^2-2$ punti distinti.

125. La seconda polare della retta R può anche essere considerata come il luogo delle intersezioni delle curve corrispondenti in due fasci projettivi. Siano oo' due punti fissi, ed i un punto variabile in R. La seconda polare mista di oi e la seconda polare mista di $o'i$ s' intersecano in $(n-2)^2$ punti che appartengono alla seconda polare di R, perchè in essi ha luogo il contatto fra questa curva e la seconda polare pura di i (124). Variando i in R, mentre oo' rimangono fissi, quelle due seconde polari miste generano due fasci projettivi dell' ordine $n-2$; ed il luogo de' punti comuni a due curve corrispondenti è appunto la seconda polare di R.

Ai punti oo' se ne possono evidentemente sostituire due altri qualunque

presi in R, perchè le $(n-2)^2$ intersezioni delle seconde polari miste di oi e di $o'i$ altro non sono che i poli di R rispetto alla prima polare di i (77). Donde si ricava quest' altra definizione (86):

La seconda polare di una retta è il luogo de' poli di questa retta rispetto alla prima polare di un punto variabile nella retta medesima (*).

(a) Questa definizione conduce spontaneamente ad un' importante generalizzazione. Date due rette R, R', quale è il luogo dei poli dell' una rispetto alla prima polare di un punto variabile nell' altra? Fissati ad arbitrio due punti oo' in R', e preso un punto qualunque i in R, le seconde polari miste de' punti oi ed $o'i$ si segano in $(n-2)^2$ punti, che sono i poli di R' rispetto alla prima polare di i. Variando i in R, quelle seconde polari miste generano due fasci projettivi dell' ordine $n-2$; ed il luogo de' punti ove si segano due curve corrispondenti è una linea dell' ordine $2(n-2)$, la quale è evidentemente la richiesta. Ad essa può darsi il nome di *seconda polare mista* delle rette RR', per distinguerla dalla seconda polare *pura* di R, superiormente definita.

(b) Come la seconda polare pura di R è il luogo di un punto la cui conica polare è toccata da R, così la seconda polare mista di due rette RR' è il luogo di un punto rispetto alla conica polare del quale le rette RR' siano coniugate. Infatti: se la seconda polare mista di oi e quella di $o'i$ passano per un punto a, la retta polare di i rispetto alla conica polare di a passa per o e per o' (123), cioè i è il polo di R' rispetto a quella conica, c. d. d.

(c) Se nella precedente ricerca (a) si pone il punto i all' intersezione delle rette RR', troviamo che la seconda polare mista delle rette medesime passa per gli $(n-2)^2$ punti comuni alla seconda polare mista de' punti oi ed alla seconda polare mista de' punti $o'i$, ossia (124) per gli $(n-2)^2$ punti in cui la seconda polare pura del punto i tocca la seconda polare pura della retta R'. Dunque:

La seconda polare pura del punto comune a due rette tocca le seconde polari pure di queste, ciascuna in $(n-2)^2$ punti. I $2(n-2)^2$ punti di contatto giacciono tutti nella seconda polare mista delle rette medesime.

126. Se la seconda polare mista di due rette RR', concorrenti in un dato punto i, dee passare per un altro punto pur dato o, è necessario e sufficiente (125, b) che quelle due rette siano coniugate rispetto alla conica polare di o, cioè ch' esse formino un sistema armonico colle rette EF che da i si possono condurre a toccare quella conica. Ossia, se le rette $RR'EF$ formano un fascio armonico, la seconda polare mista di RR' passa pei poli di tutte le coniche polari tangenti alle rette EF. Ora, se una conica polare tocca queste due rette, il polo giacerà nelle seconde polari pure d'entrambe (104, b; 124); dunque le $4(n-2)^2$ intersezioni di queste due curve sono poli d' altrettante coniche polari inscritte nell' angolo EF, epperò sono punti comuni a tutte le

---

(*) SALMON, *Higher plane curves*, p. 152.

seconde polari miste passanti per o e relative a rette passanti per i. Ond' è che queste seconde polari miste formano un fascio.

Da ciò consegue che per due punti dati oo' passa una sola seconda polare mista relativa a due rette (non date) concorrenti in un dato punto i. Vale a dire, le seconde polari pure e miste delle rette passanti per un dato punto formano una rete geometrica di curve dell' ordine $2(n-2)$.

Di qual indice è la serie delle seconde polari pure di tutte le rette passanti pel dato punto i? Cerchiamo quante di tali seconde polari passino per un punto arbitrario o. L' inviluppo delle rette le cui seconde polari (pure) passano per o è la conica polare di questo medesimo punto (104, g); ad essa arrivano due tangenti da i; dunque per i passano due sole rette le cui seconde polari (pure) contengano il punto o. Ossia le seconde polari pure delle rette passanti per un punto dato formano una serie d' indice 2.

127. Sia p un punto comune alla seconda polare pura di R ed all' Hessiana (della curva fondamentale C_n). Come appartenente alla prima di queste curve, p sarà il polo di una conica polare tangente ad R; e come appartenente all' Hessiana, lo stesso punto avrà per conica polare un pajo di rette incrociantisi nel punto corrispondente o della Steineriana. Ond' è che i punti comuni all' Hessiana ed alla seconda polare di R saranno tanti, quante sono le intersezioni di R colla Steineriana, cioè $3(n-2)^2$. Dunque:

La seconda polare pura di una retta qualunque tocca l' Hessiana dovunque l' incontra, cioè in $3(n-2)^2$ punti.

Siccome la conica polare di p è formata da due rette concorrenti in o, così la retta R, che passa per o, ha, rispetto a quella conica, infiniti poli situati in un' altra retta pur concorrente in o (110, a). Laonde una retta R' condotta ad arbitrio (non per o) contiene un polo di R relativo alla conica polare di p; ossia (125, b) p è un punto della seconda polare mista delle rette RR'. Dunque:

I $6(n-2)^2$ punti in cui l' Hessiana è toccata dalle seconde polari pure di due rette date giacciono tutti nella seconda polare mista delle rette medesime.

Le seconde polari pure delle rette passanti per un dato punto i formano (126) una serie d' ordine $2(n-2)$ e d' indice 2; epperò sono inviluppate (124, b) da una linea dell' ordine $4(n-2)$. Questa linea è composta dell' Hessiana e della seconda polare pura del punto i (125, c); e gli $8(n-2)^2$ punti, in cui le seconde polari pure di due fra quelle rette toccano l' Hessiana e la seconda polare pura di i, giacciono tutti nella seconda polare mista delle medesime due rette.

(a) Si è dimostrato che la seconda polare (pura) di R tocca l' Hessiana in p: inoltre anche la seconda polare (pura) di o passa per p, giacchè questo punto è doppio per la prima polare di o. D' altra parte la seconda polare (pura) di o e la seconda polare (pura) di R (retta passante per o) si toccano ovunque s' incontrano (124); dunque:

L' Hessiana, in un suo punto qualunque, è tangente alla seconda polare (pura) del corrispondente punto della Steineriana.

(b) Da ciò segue che la tangente in p all' Hessiana è la coniugata armonica di po rispetto alle due rette che toccano la prima polare di o nel punto doppio p (74, c); e se la prima polare di o ha una cuspide in p, la tangente cuspidale tocca ivi anche l' Hessiana.

Analogamente, la tangente in o alla Steineriana è la coniugata armonica di op rispetto alle due rette che formano la conica polare di p.

(c) Se si considera una seconda retta R' passante per o, la seconda polare pura di R' toccherà anch' essa l' Hessiana in p. Viceversa: le rette le cui seconde polari pure passano per p sono le tangenti della conica polare di p (104, g); ma questa conica si risolve in due rette passanti per o; dunque le rette, le cui seconde polari pure contengono il punto p, passano tutte per o.

Ossia, l' Hessiana è toccata in p dalla seconda polare pura di o e dalle seconde polari pure e miste di tutte le rette passanti per o.

(d) Siccome i contatti dell' Hessiana colla seconda polare (pura) di una retta R corrispondono alle intersezioni di R colla Steineriana, così, se R tocca questa curva in un punto o, la seconda polare (pura) di R avrà un contatto quadripunto coll' Hessiana nel corrispondente punto p, e la toccherà semplicemente in $3(n-2)^2-2$ altri punti.

Le rette tangenti alla conica polare d' un punto i sono le sole (104, g), a cui spettino seconde polari pure passanti per i. Ma quella conica ha $6(n-1)(n-2)$ tangenti comuni colla Steineriana; dunque la serie formata dalle seconde polari pure (di rette) aventi un contatto quadripunto coll' Hessiana è dell' indice $6(n-1)(n-2)$.

Se R è una tangente doppia della Steineriana, la seconda polare (pura) di R avrà coll' Hessiana due contatti quadripunti e $3(n-2)^2-4$ contatti bipunti.

E se R è una tangente stazionaria della Steineriana, la seconda polare (pura) di R avrà coll' Hessiana un contatto sipunto, oltre a $3(n-2)^2-3$ contatti bipunti.

128. Quali sono le rette le cui seconde polari (pure) hanno un punto doppio? Siccome la seconda polare (pura) di una retta R è il luogo dei poli delle coniche polari tangenti ad R, così, se quella seconda polare ha un punto doppio, è necessario che vi sia una conica polare avente più di due punti comuni con R, cioè una conica polare che si risolva in due rette, una delle quali sia R. Dunque:

Le rette cui spettano seconde polari (pure) dotate di punto doppio sono quelle che a due a due costituiscono le coniche polari dei punti dell' Hessiana. E i punti doppi delle seconde polari (pure) di quelle rette sono gli stessi punti dell' Hessiana.

La seconda polare (pura) di un punto qualunque i sega l' Hessiana in $3(n-2)^2$ punti, poli di altrettante coniche polari passanti per i, ciascuna delle quali è il sistema di due rette. Dunque:

Le rette che costituiscono le coniche polari dei punti dell' Hessiana inviluppano una curva della classe $3(n-2)^2$.

129. La seconda polare mista di due rette RR' è il luogo di un punto alla conica polare del quale condotte le tangenti dal punto RR', queste tangenti formino colle rette date un fascio armonico. Tali coniche polari costituiscono

una serie d' indice $2(n-2)^2$, tanti essendo i punti in cui quella seconda polare mista è intersecata dalla seconda polare (pura) di un punto arbitrario; dunque fra quelle coniche ve ne sono $4(n-2)^2$ tangenti ad una retta qualsivoglia data (85).

Ora sia data una conica qualunque C, e si domandi il luogo di un punto la cui conica polare sia inscritta in un triangolo coniugato a C. Sia a un punto arbitrario ed A la retta polare di a rispetto a C. Vi sono $4(n-2)^2$ coniche polari tangenti ad A e a due rette concorrenti in a e coniugate rispetto a C, ossia $4(n-2)^2$ coniche polari inscritte in triangoli coniugati a C, un lato dei quali sia in A. Ma le coniche polari tangenti ad A hanno i loro poli nella seconda polare pura di A; dunque il luogo richiesto ha $4(n-2)^2$ punti comuni colla seconda polare pura di una retta arbitraria, vale a dire, è una curva dell' ordine $2(n-2)$.

Quando un triangolo coniugato alla conica C abbia un vertice o sulla curva, due lati coincidono nella tangente ed il terzo è una retta arbitraria passante per o. Dunque, se il punto o appartiene anche alla Steineriana, cioè se o è il punto doppio della conica polare d' un punto p dell' Hessiana, questa conica può risguardarsi come inscritta in quel triangolo. Per conseguenza:

Il luogo di un punto, la conica polare del quale sia inscritta in un triangolo coniugato ad una conica qualsivoglia data, è una linea dell' ordine $2(n-2)$, che sega l' Hessiana ne' punti corrispondenti alle intersezioni della Steineriana colla conica data.

Questa linea d' ordine $2(n-2)$, quando la conica data degeneri in un pajo di rette, non è altro che la seconda polare mista delle rette medesime.

Così ad una conica qualunque corrisponde una determinata curva d' ordine $2(n-2)$. E pel teorema (**111**, f) è evidente che a più coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo corrispondono altrettante curve d' ordine $2(n-2)$ formanti un fascio.

SEZIONE III.

CURVE DEL TERZ' ORDINE.

Art. XXII. L' Hessiana e la Cayleyana di una curva del terz' ordine.

130. Applichiamo le teorie generali precedentemente esposte al caso che la curva fondamentale sia del terz' ordine, vale a dire una cubica C_3, che supporremo priva di punti multipli; ond' essa sarà della sesta classe (70) ed avrà nove flessi (100).

(a) Un punto qualunque è polo di una conica polare e di una retta polare (68).

Per due punti presi ad arbitrio passa una sola conica polare (77, a). Tutte le coniche polari passanti per un punto o hanno altri tre punti $o_1 o_2 o_3$ comuni, e i loro poli giacciono in una retta, che è la polare di ciascuno di quei quattro punti $o o_1 o_2 o_3$.

Una retta ha dunque *quattro* poli; essi sono i vertici del quadrangolo inscritto nelle coniche polari dei punti della retta.

Tutte le rette passanti per uno stesso punto o hanno i loro poli in una conica, la quale è la conica polare del punto o (69, a).

(b) La retta polare di un punto o' rispetto alla conica polare di un altro punto o coincide colla retta polare di o rispetto alla conica polare di o' (69, c). Ond' è che, se da o si conducono le tangenti alla conica polare di o', e da o' le tangenti alla conica polare di o, i quattro punti di contatto giacciono in una sola retta: la *seconda polare mista* de' punti oo' (123).

(c) Da un punto qualunque o del piano si possono, in generale, condurre sei tangenti alla cubica data, poichè questa è una curva della sesta classe. I sei punti di contatto giacciono tutti nella conica polare del punto o.

(d) Ma se o è un punto della cubica, questa è ivi toccata sì dalla retta polare che dalla conica polare del punto medesimo. In questo caso, da o partono sole quattro rette, tangenti alla cubica in altri punti. Ed i punti di contatto sono le quattro intersezioni di questa curva colla conica polare di o (71).

131. Sia o un punto della cubica, la quale intersechi la conica polare del medesimo (oltre al toccarla in o) in $abcd$: onde le rette $o(a, b, c, d)$ saranno tangenti alla cubica rispettivamente in $abcd$ (130, d).

Una tangente è incontrata dalla tangente infinitamente vicina nel suo punto di contatto (30); quindi, se o' è il punto della cubica successivo ad o, le quattro rette $o'(a, b, c, d)$ saranno le quattro tangenti che si possono condurre da o'. Siccome poi la conica polare di o tocca la cubica in o e la sega in $abcd$, così i sei punti $oo'abcd$ giacciono tutti in essa conica, epperò i due fasci $o(a, b, c, d)$, $o'(a, b, c, d)$ hanno lo stesso rapporto anarmo-

nico (62). Ciò significa che il rapporto anarmonico delle quattro tangenti condotte alla cubica da un suo punto o non cambia passando al punto successivo; ossia:

Il rapporto anarmonico del fascio di quattro tangenti, che si possono condurre ad una cubica da un suo punto qualunque, è costante (*).

(a) Di qui si ricava che, se $o(a, b, c, d)$, $o'(a', b', c', d')$ sono i due fasci di tangenti relativi a due punti qualisivogliano o, o' della cubica, i quattro punti in cui le tangenti del primo fascio segano le corrispondenti del secondo giacciono in una conica passante per oo' (62). La corrispondenza delle tangenti ne' due fasci può essere stabilita in quattro maniere diverse, perchè il rapporto anarmonico del fascio $o(a, b, c, d)$ è identico (1) a quello di ciascuno de' tre fasci $o(b, a, d, c)$, $o(c, d, a, b)$, $o(d, c, b, a)$; dunque i sedici punti ne' quali le quattro tangenti condotte per o intersecano le quattro tangenti condotte per o' giacciono in quattro coniche passanti per oo'.

(b) Il rapporto anarmonico *costante* delle quattro tangenti, che arrivano ad una cubica da un suo punto qualunque, può essere chiamato *rapporto anarmonico della cubica.*

Una cubica dicesi *armonica* quando il suo rapporto anarmonico è l' *unità negativa*, cioè quando le quattro tangenti condotte da un punto qualunque della curva formano un fascio armonico.

Una cubica si dirà *equianarmonica* quando il suo rapporto anarmonico sia una radice cubica imaginaria dell' *unità negativa*, cioè quando le quattro tangenti condotte da un punto della curva abbiano i tre rapporti anarmonici *fondamentali* eguali fra loro (27).

132. Se la conica polare di un punto o è un pajo di rette che si seghino in o', viceversa la conica polare di o' è un pajo di rette incrociate in o (78). Dunque il luogo de' punti doppi delle coniche polari risolventisi in paja di rette è anche il luogo de' loro poli, cioè la Steineriana e l' Hessiana sono una sola e medesima curva del terz' ordine (88, 90).

(a) Inoltre, siccome la retta oo' tiene il luogo di due rette congiungenti due punti o, o' dell' Hessiana ai corrispondenti punti o', o della Steineriana, così l' inviluppo di oo', che secondo il teorema generale (98, b) sarebbe della sesta classe, si ridurrà qui alla terza classe (**).

(b) I punti o, o' sono *poli coniugati* rispetto ad una qualunque delle coniche polari (98, b), le quali costituiscono una rete geometrica del second' ordine. Dunque:

Il luogo delle coppie di poli coniugati relativi ad una rete di coniche è una curva del terz' ordine (l' Hessiana della rete) (***).

(c) Nella teoria generale è dimostrato che la Steineriana in un suo

---

(*) Salmon, *Théorèmes sur les courbes de troisième degré* (Giornale di Crelle, t. 42, Berlino 1851, p. 274). — *Higher plane curves*, p. 151.

(**) Cayley, *Mémoire sur les courbes du troisième ordre* (Journal de M. Liouville, aout 1844, p. 290),

(***) Hesse, *Ueber die Wendepuncte u. s. w.* p. 105.

punto qualunque è toccata dalla retta polare del corrispondente punto dell' Hessiana (118), e che l' Hessiana è toccata in un suo punto qualunque dalla seconda polare del corrispondente punto della Steineriana (127, a). Nel caso della curva di terz' ordine, queste due proprietà si confondono in una sola, ed è che la tangente all' Hessiana in o è la retta polare di o'; ossia:

L' Hessiana è l' inviluppo delle rette polari de' suoi punti.

Questo teorema somministra le sei tangenti che arrivano all' Hessiana da un punto arbitrario i. Infatti, le rette polari passanti per i hanno i loro poli nella conica polare di i, la quale incontra l' Hessiana in sei punti; ciascuno di questi ha per retta polare una tangente dell' Hessiana, concorrente in i. Naturalmente i punti di contatto di queste sei tangenti giacciono nella conica polare di i relativa all' Hessiana.

133. Siano o, o' (fig. 8.ª) due poli coniugati (rispetto alle coniche polari); la conica polare di o sarà il sistema di due rette ab, cd concorrenti in o', e la conica polare di o' sarà formata da due altre rette ad, bc incrociantisi in o. Se le due coniche polari si segano mutuamente in $abcd$, questi saranno (130, a) i poli della retta oo', e le rette ac, bd, il cui punto comune sia u, formeranno la conica polare di un punto u' situato nella retta oo'. Dunque u, u' sono due nuovi poli coniugati; ed u' è il terzo punto d' intersezione dell' Hessiana colla retta oo'.

La retta polare di o' rispetto alla cubica fondamentale coincide (69, b) colla polare di o' rispetto alla conica formata dalle due rette ad, bc; dunque (132, c) la tangente in o all' Hessiana è la retta ou, coniugata armonica di oo' rispetto alle ad, bc: proprietà che poteva anche concludersi dal teorema (127, b). Analogamente la tangente all' Hessiana in o' è $o'u$. Dunque:

Le tangenti all' Hessiana in due poli coniugati o, o' concorrono nel punto di questa curva, che è polo coniugato alla terza intersezione della medesima colla retta oo'.

(a) Due punti di una cubica chiamansi *corrispondenti*, quando hanno lo stesso tangenziale (39, b), cioè quando le tangenti in essi incontrano la curva in uno stesso punto.

Usando di questa denominazione possiamo dire che due poli coniugati rispetto ad una rete di coniche sono punti corrispondenti dell' Hessiana di questa rete.

(b) Siccome le rette polari di o, o' concorrono in u, così la conica polare di u passerà per o e per o'. Ma u è un punto dell' Hessiana; dunque la sua conica polare consta della retta oo' e di una seconda retta passante per u'. Ossia:

Una retta la quale unisca due poli coniugati o, o', e seghi per conseguenza l' Hessiana in un terzo punto u', fa parte della conica polare di quel punto u che è polo coniugato ad u'.

Le rette che costituiscono le coniche polari dei punti dell' Hessiana inviluppano una curva di terza classe (128). Essa coincide adunque coll' inviluppo della retta che unisce due punti corrispondenti dell' Hessiana (132, a).

A questa curva daremo il nome di *Cayleyana* della cubica data, in onore

dell' illustre Cayley, che ne trovò e dimostrò le più interessanti proprietà in una sua elegantissima Memoria analitica (*).

(c) Le tangenti che da un punto qualunque o dell' Hessiana si possono condurre alla Cayleyana sono la retta che unisce o al suo polo coniugato o', e le due rette formanti la conica polare di o'.

(d) Se $abcd$ sono i quattro poli di una retta R, le coppie di rette (bc, ad), (ca, bd), (ab, cd) costituiscono tre coniche polari, i cui poli giacciono in R; dunque i punti di concorso di quelle tre coppie di rette appartengono all' Hessiana. Ossia:

L' Hessiana è il luogo de' punti diagonali, e la Cayleyana è l' inviluppo dei lati del quadrangolo completo i cui vertici siano i quattro poli di una retta qualunque.

134. Siano aa', bb' due coppie di poli coniugati; c il punto comune alle rette ab, $a'b'$; c' quello ove si segano le ab', $a'b$. Allora $aa'bb'cc'$ saranno i sei vertici di un quadrilatero completo; e siccome i termini delle due diagonali aa', bb' sono, per ipotesi, poli coniugati rispetto a qualsivoglia conica polare, così anche i punti cc' saranno poli coniugati rispetto alla medesima rete di coniche (109). Dunque:

Se abc sono tre punti dell' Hessiana in linea retta, i tre poli $a'b'c'$ coniugati a quelli formano un triangolo i cui lati $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ passano per a, b, c.

Donde si ricava che, dati due poli coniugati aa' ed un altro punto b dell' Hessiana, per trovare il polo coniugato b', basta tirare le rette ba, ba' che seghino nuovamente questa curva in c, c'; il punto comune alle ca', $c'a$ è il richiesto (**).

(a) Le rette condotte da un punto qualunque o dell' Hessiana alle coppie di poli coniugati formano un' involuzione (di secondo grado). Infatti: se una retta condotta ad arbitrio per o sega l' Hessiana in a e b, i poli a', b' coniugati a questi sono pure in linea retta con o; onde le rette oab, $oa'b'$ sono così tra loro connesse che l' una determina l' altra in modo unico. Dunque ecc.

(b) Viceversa, dati sei punti aa', bb', cc', il luogo di un punto o, tale che le coppie di rette $o(a, a')$, $o(b, b')$, $o(c, c')$ siano in involuzione, è una curva del terz' ordine, per la quale aa', bb', cc' sono coppie di punti corrispondenti (***).

135. Quando due de' quattro poli (*poli congiunti*) di una retta coincidano in un solo o, questo appartiene all' Hessiana (90, b), e tutte le coniche polari passanti per esso hanno ivi la stessa tangente oo'. Siano (fig. 8.^{a}) o_1o_2 gli altri due poli della retta $(o'u)$ polare di o; cioè siano o_1o_2 i punti in cui le rette (ad, bc) formanti la conica polare di o' incontrano quella retta che passa per u' e forma con oo' la conica polare di u (133, b).

Due delle tangenti, che da o_1 ponno condursi alla Cayleyana (133, d), coincidono con o_1o, e la terza è o_1o_2; così pure, delle tangenti che da o_2

(*) *A Memoir on curves of the third order* (Philosophical Transactions, vol. 147, part 2, London 1857, p. 415—446).

(**) Maclaurin, *l. c.* p. 242.

(***) Cayley, *Mémoire sur les courbes du troisième ordre*, p. 287.

arrivano alla Cayleyana, due coincidono in o_2o, e la terza è o_2o_1. Dunque (30) le rette oo_1, oo_2 toccano la Cayleyana in o_1, o_2.

Ne segue che la Cayleyana è il luogo de' poli congiunti ai punti dell'Hessiana (105), cioè: se una retta polare si muove inviluppando l'Hessiana, due poli coincidenti percorrono l'Hessiana medesima, mentre gli altri due poli distinti descrivono la Cayleyana.

(a) Si noti ancora che da un punto qualunque o dell'Hessiana partono tre tangenti $o(o_1, o_2, o')$ della Cayleyana; e due di queste oo_1, oo_2, si corrispondono fra loro in modo che la retta passante pei loro punti di contatto o_1o_2 è pure una tangente della Cayleyana.

(b) Quella retta che passa per u', e forma con oo' la conica polare di u, sega la Cayleyana, non solo in o_1o_2 poli congiunti ad o, ma eziandio in $o_1'o_2'$ poli congiunti ad o'. Siccome poi quella retta è pure una tangente della Cayleyana, così se ne inferisce che questa curva è del sest'ordine.

Il che può dimostrarsi anche nel seguente modo. Da un punto i partono sei tangenti dell'Hessiana (132, c); ciascuna di queste rette ha due poli coincidenti in un punto dell'Hessiana medesima, dunque gli altri dodici poli giacciono nella Cayleyana. Ma i poli delle rette passanti per i sono tutti nella conica polare di i, epperò questa sega la Cayleyana in dodici punti; cioè la Cayleyana è una curva del sest'ordine.

(c) Da quanto precede si raccoglie che, se oo_1 è una tangente della Cayleyana, il punto di contatto o_1 è un polo congiunto a quel punto o dell'Hessiana che giace in quella retta, senza però che vi giaccia il suo corrispondente o'. Dunque, se indichiamo con ω il punto di contatto della oo' colla Cayleyana, ω sarà un polo congiunto al punto u'.

Sia v' il terzo punto in cui l'Hessiana è segata dalla retta uu', e sia v il polo coniugato a v'. Quella retta che passa per v' e forma con uu' la conica polare di v segherà oo' nel punto ω.

Ora, la retta polare di v rispetto alla conica polare di o passa per o', perchè questa conica è un pajo di rette incrociate in o'. Ma la retta polare di v rispetto alla conica polare di o coincide (130, b) colla retta polare di o rispetto alla conica polare di v, cioè rispetto al sistema $(uu', v'\omega)$; dunque il polo o ed i punti u', ω, o', in cui la retta oo' taglia la conica e la retta polare anzidette, formano un sistema armonico (110, a); ossia:

La retta che unisce due poli coniugati è divisa armonicamente dal terzo punto ov'essa incontra l'Hessiana, e dal punto ove tocca la Cayleyana (*).

136. L'inviluppo delle rette polari de' punti di una data retta R è una conica, che è anche il luogo dei poli delle coniche polari tangenti ad R (103), ed anche il luogo dei poli di R rispetto alle coniche polari dei punti di R medesima (125). Questa conica, che secondo la teoria generale (104) è la seconda polare (pura) di R, si chiamerà, nel caso attuale, più brevemente *poloconica* (*pura*) della retta R.

(a) La conica polare di un punto i, oltre all'essere il luogo de' punti

---

(*) Cayley, *A Memoir on curves etc.* p. 125.

le cui rette polari concorrono in i, può anche definirsi l'inviluppo delle rette le cui poloconiche passano per i (104, g).

(b) Le rette le cui poloconiche hanno un punto doppio son quelle che costituiscono le coniche polari dei punti dell'Hessiana (128), cioè sono le tangenti della Cayleyana.

Consideriamo adunque la retta oo' (fig. 8.ª) e ricerchiamone la poloconica, come luogo dei poli delle coniche polari tangenti ad oo'. Siccome oo' fa parte della conica polare di u, così questo punto sarà doppio per la poloconica richiesta (128). Osservisi poi che la conica polare di ciascuno de' punti o, o' ha due punti coincidenti comuni con oo'; dunque la poloconica di questa è il pajo di rette uo, uo'.

Vediamo così che l' Hessiana è il luogo de' punti doppi delle poloconiche risolventisi in due rette, ed è anche l' inviluppo di queste rette; mentre la Cayleyana è inviluppata dalle rette a cui si riferiscono quelle poloconiche (*).

(c) Il luogo di un punto rispetto alla conica polare del quale due rette R, R' siano coniugate, è una conica (la seconda polare mista di RR', giusta la teoria generale), la quale può chiamarsi la *poloconica mista* delle rette RR'. Essa è anche il luogo dei poli di una qualunque di queste rette rispetto alle coniche polari dei punti dell'altra (125, a, b).

(d) La retta polare del punto comune a due rette RR' tocca le poloconiche pure di queste rette in due punti, che giacciono nella poloconica mista delle rette medesime (125, c).

137. Se una retta R incontra l' Hessiana in tre punti abc, la poloconica di R tocca questa curva ne' poli $a'b'c'$ coniugati a quelli (122, 127). Donde segue che, se R è una tangente ordinaria dell'Hessiana, il cui punto di contatto sia a ed il punto di semplice intersezione b, la poloconica di R avrà coll' Hessiana un contatto quadripunto in a' (polo coniugato ad a) ed un contatto bipunto in b' (polo coniugato a b). E se R tocca l' Hessiana in un flesso a, la poloconica di R avrà colla curva medesima un contatto sipunto in a' (127, d).

(a) I sei punti in cui l'Hessiana è toccata dalle poloconiche pure di due rette giacciono nella poloconica mista delle rette medesime (127). Dunque:

Se due rette incontrano l' Hessiana in sei punti, i poli coniugati a questi giacciono in una stessa conica (**);

Se pei tre punti in cui l' Hessiana è toccata da una poloconica si fa passare un'altra conica qualsivoglia, questa taglia l' Hessiana in tre nuovi punti, ne' quali questa curva è toccata da una seconda poloconica.

Abbiamo veduto (136, b) che, se o, o' sono due poli coniugati (fig. 8.ª), ne' quali l' Hessiana sia toccata da rette concorrenti in u, queste rette costituiscono la poloconica (pura) di oo'. Questa poloconica tocca l' Hessiana in

(*) Cayley, *A Memoir on curves etc.*, p. 432.

(**) Più generalmente, se una conica taglia l' Hessiana in sei punti, i poli coniugati a questi giacciono in un' altra conica (129).

u, o, o'. Dunque questi tre punti ed altri tre analoghi giacciono sempre in una stessa conica.

(b) Le quattro rette che da u si ponno condurre a toccare altrove l' Hessiana sono quelle che costituiscono le poloconiche (pure) delle due rette concorrenti in u' e formanti la conica polare di u (136, b). I punti di contatto di quelle quattro rette sono in una conica tangente all' Hessiana in u (130, d), e d' altronde i punti di contatto dell' Hessiana colle poloconiche pure di due rette giacciono nella poloconica mista di queste. Dunque:

La conica polare di un punto u dell' Hessiana, rispetto all' Hessiana medesima, coincide colla poloconica mista delle due rette che formano la conica polare di u, rispetto alla curva fondamentale.

138. Una trasversale condotta ad arbitrio per un polo fisso o seghi la cubica fondamentale ne' punti $a_1a_2a_3$ e la conica polare di o in m_1m_2. Nella medesima trasversale si cerchino i due punti $\mu_1\mu_2$ determinati dalle due equazioni:

$$1) \qquad \frac{1}{o\mu_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{om_1} - \frac{1}{om_2}\right), \quad \frac{1}{o\mu_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{om_2} - \frac{1}{om_1}\right),$$

ossia dall' equazione quadratica:

$$2) \qquad \frac{1}{\overline{o\mu}^2} - \frac{1}{o\mu}\left(\frac{1}{om_1} + \frac{1}{om_2}\right) + \frac{4}{om_1.om_2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{om_1} + \frac{1}{om_2}\right)^2 = 0.$$

Ma per le relazioni che hanno luogo fra i tre punti $a_1a_2a_3$ ed i loro centri armonici m_1m_2 (**III.**), si ha:

$$\frac{1}{om_1} + \frac{1}{om_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{oa_1} + \frac{1}{oa_2} + \frac{1}{oa_3}\right),$$

$$\frac{1}{om_1.om_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{oa_2.oa_3} + \frac{1}{oa_3.oa_1} + \frac{1}{oa_1.oa_2}\right),$$

onde l' equazione 2) potrà scriversi così:

$$3) \quad \left(\frac{1}{o\mu} - \frac{1}{oa_1}\right)\left(\frac{1}{o\mu} + \frac{1}{oa_1} - \frac{1}{oa_2} - \frac{1}{oa_3}\right) + \left(\frac{1}{o\mu} - \frac{1}{oa_2}\right)\left(\frac{1}{o\mu} + \frac{1}{oa_2} - \frac{1}{oa_3} - \frac{1}{oa_1}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{o\mu} - \frac{1}{oa_3}\right)\left(\frac{1}{o\mu} + \frac{1}{oa_3} - \frac{1}{oa_1} - \frac{1}{oa_2}\right) = 0.$$

Facendo girare la trasversale intorno ad o, il luogo de' punti $\mu_1\mu_2$ sarà una curva di second' ordine, che si può chiamare *conica satellite* del polo o (*).

Se i punti a_2a_3 coincidono, cioè se la trasversale tocca la cubica in

(*) Qual sarebbe l' analoga ricerca per una curva fondamentale di ordine n? Essa dovrebbe condurre ad una *curva satellite* dell' ordine $(n-1)(n-2)$. Veggasi: SALMON, *Higher plane curves*, p. 68-69.

a_2 e la sega in a_1, l' equazione 3) manifesta nel primo membro il fattore $\frac{1}{o\mu} - \frac{1}{oa_1}$. Dunque la conica satellite contiene i sei punti in cui la cubica fondamentale è segata dalle tangenti condotte pel polo.

Se i punti $m_1 m_2$ coincidono, cioè se la trasversale tocca in m_1 la conica polare di o, le 1) mostrano che i punti $\mu_1 \mu_2$ coincidono entrambi in m_1, vale a dire, in questo punto la trasversale tocca anche la conica satellite. Dunque la conica satellite tocca la conica polare ne' punti in cui questa è incontrata dalla retta polare.

(a) Da quanto or si è detto e dal teorema (39, b) risulta che, se o è un punto dell' Hessiana, cioè se la conica polare di o è un pajo di rette concorrenti in o', anche la conica satellite sarà un pajo di rette concorrenti in questo medesimo punto, e propriamente il pajo formato dalle rette satelliti di quelle che costituiscono la conica polare di o.

Dunque ciascuna delle due rette concorrenti in o' e facenti parte della conica polare di o ha per punto satellite (39, b) il punto o'. Ossia:

L' Hessiana è il luogo de' punti satelliti delle rette che toccano la Cayleyana.

(b) Si ottiene un' altra definizione della Cayleyana, osservando che (fig. 8.ª) il punto u è (133) il tangenziale di o' (come anche di o) rispetto all' Hessiana: e siccome le rette $o(a, b, u, u')$ formano un fascio armonico, così oo' è la retta polare di u rispetto alla conica polare di o'. Dunque la Cayleyana è l' inviluppo della retta seconda polare mista di due punti dell' Hessiana, l' un de' quali sia il tangenziale dell' altro (*).

Art. XXIII. Fascio di curve del terz' ordine aventi i medesimi flessi.

139. Il teorema (71), applicato alla cubica fondamentale C_3, significa che, se per un punto fisso i della curva si tira una trasversale qualunque a segar quella in altri due punti $i_1 i_2$, il luogo del coniugato armonico di i rispetto ad $i_1 i_2$ è la conica polare di i.

Ma se i è un flesso della cubica, la conica polare si decompone nella relativa tangente stazionaria ed in un' altra retta I che non passa per i (80). Dunque il luogo del punto coniugato armonico di un flesso di una curva, rispetto ai due punti in cui questa è incontrata da una trasversale mobile intorno al flesso, è una retta (**).

Alla retta I, che sega la cubica ne' tre punti ove questa è toccata dalle tre tangenti concorrenti nel flesso (39, c), si dà il nome di *polare armonica*

(*) Cayley, *A Memoir on curves etc.* p. 439-442.
(**) Maclaurin, *l. c.* p. 228.

del flesso i, e non dee confondersi coll' ordinaria *retta polare* che è la tangente stazionaria.

(a) Dal flesso i si tirino due trasversali a segare la cubica rispettivamente ne' punti aa', bb'. Siccome la polare armonica è pienamente determinata dai coniugati armonici di i rispetto alle coppie di punti aa', bb', così essa non è altro che la polare di i rispetto al pajo di rette (ab, $a'b'$), oppure rispetto al pajo (ab', $a'b$). Dunque (110, a) la retta I passa pel punto comune alle rette (ab, $a'b'$) e pel punto comune alle (ab', $a'b$).

Se le due trasversali coincidono, si ottiene la proprietà che, se pel flesso i si conduce una trasversale a segare la cubica in a, b, le tangenti in questi punti vanno ad incontrarsi sulla polare armonica di i.

Quanto precede mette in evidenza che un flesso di una cubica ha, rispetto a questa ed alla sua polare armonica, le stesse proprietà (*) che un punto qualunque possiede riguardo ad una conica ed alla sua retta polare (107).

(b) Se tre rette segano la cubica data rispettivamente ne' punti iaa', jbb', lcc', e se ijl, abc giacciono in due rette, anche $a'b'c'$ sono in linea retta (39, a). Supposto che i punti ijl coincidano in un solo (flesso) i, le due rette abc, $a'b'c'$ concorreranno, come or ora si è osservato, sulla polare armonica di i. Se inoltre i punti abc coincidono in un punto unico, lo stesso avrà luogo de' punti $a'b'c'$; dunque:

La retta che unisce due flessi di una cubica sega questa in un terzo flesso (**). E le tangenti (stazionarie) in due qualunque di questi tre flessi concorrono sulla polare armonica del terzo.

(c) Da questo teorema e dalla definizione della polare armonica d' un flesso si raccoglie che, se 123 sono tre flessi in linea retta, il punto coniugato armonico di 1 rispetto a 23 è situato nella polare armonica di 1, ecc.; e che per conseguenza le polari armoniche de' flessi 123 sono le rette che uniscono i vertici del trilatero formato dalle relative tangenti stazionarie, col polo della retta 123 rispetto al trilatero medesimo (76).

(d) Il teorema « se tre flessi 123 della cubica sono in linea retta, le loro polari armoniche $I_1 I_2 I_3$ concorrono in uno stesso punto » può dimostrarsi anche così. Siano $I'_1 I'_2 I'_3$ le tangenti (stazionarie) della cubica ne' tre flessi nominati; le coppie di rette $I_1 I'_1$ $I_2 I'_2$, $I_3 I'_3$ sono le coniche polari de' punti medesimi, e queste coniche devono essere circoscritte ad uno stesso quadrangolo, i cui vertici siano i poli della retta 123 (130, a). Vale a dire, le rette $I_3 I'_3$ devono passare pei quattro punti $I'_1 I_2$, $I'_1 I'_2$, $I_1 I_2$, $I_1 I'_2$. Ma le tangenti in due de' flessi 123 s' incontrano sulla polare armonica del terzo, ossia I_3 passa pel punto $I'_1 I'_2$; dunque I_3 passerà anche pel punto $I_1 I_2$, c. d. d.

Di qui si raccoglie che i quattro poli di una retta che contenga tre flessi della cubica sono i vertici del trilatero formato dalle tre corrispondenti tangenti stazionarie,

---

(*) CHASLES, *Aperçu historique*, p. 349.
(** MACLAURIN, *l. c.* p. 231.

ed il punto di concorso delle polari armoniche de' tre flessi (*).

140. Tre trasversali condotte pel flesso i seghino la data cubica nei punti aa', bb', cc'; esse incontreranno la retta I, polare armonica di i, nei punti α, β, γ coniugati armonici di i rispetto alle coppie aa', bb', cc'. Ma gli stessi punti $\alpha\beta\gamma$ giacciono anche nella conica polare di i relativa a qualsivoglia cubica descritta pei sette punti $oaa'bb'cc'$ (139). Dunque questa conica polare si risolve in due rette, una delle quali è I; vale a dire (80), i è un flesso (ed I è la relativa polare armonica) per qualunque curva di terz'ordine passante pei sette punti anzidetti (**).

(a) Una cubica ha nove flessi, che sono le intersezioni della medesima coll' Hessiana (100). Siccome poi la retta che unisce due flessi passa per un terzo flesso (139, b), così per ciascuno di que' nove punti passeranno quattro rette contenenti gli otto restanti. Quindi, in virtù del precedente teorema, qualunque linea del terz' ordine descritta pei nove flessi di una data cubica ha i suoi flessi in questi medesimi punti (***).

Le cubiche aventi in comune i nove flessi chiamansi *sizigetiche*.

(b) Siccome per ogni flesso della cubica data passano quattro rette, ciascuna delle quali contiene altri due flessi, così il numero delle rette contenenti tre flessi è $\frac{4 \times 9}{3} = 12$. Indicando i flessi coi numeri 123.....9, tali rette si possono rappresentare così:

123,	148,	157,	169,
456,	259,	268,	358,
789,	367,	349,	247;

dove si fa manifesto che queste dodici rette si ripartiscono in quattro gruppi, ciascuno de' quali è formato da tre rette (scritte nella stessa linea verticale) passanti per tutti i nove punti d'inflessione. Dunque pei nove flessi di una cubica passano quattro sistemi di tre rette (****), ossia in un fascio di cubiche sizigetiche v' hanno quattro cubiche, ciascuna delle quali si risolve in tre rette (cubiche trilatere).

Siccome una terna di rette può risguardarsi come una linea di terz'ordine dotata di tre punti doppi, e d' altronde (88) un fascio di cubiche contiene dodici punti doppi, così pei nove flessi della cubica data non passa, oltre i quattro sistemi di tre rette, alcuna curva dotata di punto doppio o di cuspide.

141. Considerando il flesso i della cubica fondamentale come un punto dell' Hessiana (cioè come un punto avente per conica polare un pajo di rette incrociate in un altro punto i'), il polo i' coniugato (132, b) ad i è il punto d' intersezione della tangente stazionaria colla polare armonica. In generale, le

---

(*) Plücker, *System der analytischen Geometrie*, p. 288.
(**) Salmon, *Lettre à M. A. L. Crelle* Giornale di Crelle, t. 39, Berlino 1850, p. 365.
(***) Hesse, *Ueber die Wendepuncte u. s. w.* p. 107.
(****) Plücker, *System der analytischen Geometrie*, p. 284.

tangenti all' Hessiana in due poli coniugati concorrono in uno stesso punto della medesima (133); d' altronde essendo i un flesso anche per l' Hessiana (140, a), questa curva ha ivi colla sua tangente un contatto tripunto; dunque la tangente in i' sega l' Hessiana in i, ossia la retta che è tangente (stazionaria) della cubica fondamentale nel flesso i è anche tangente (ordinaria) dell' Hessiana nel polo coniugato i' (*).

Questa proprietà si poteva anche conchiudere dalla teoria generale (118, c; 119, b), dalla quale segue ancora che tutte le coniche polari passanti per i' hanno ivi fra loro un contatto tripunto.

(a) Ciascuna tangente stazionaria della cubica fondamentale, essendo anche una tangente ordinaria dell' Hessiana, conta come *due* tangenti comuni; onde le due curve avranno altre $6 . 6 - 2 . 9 = 18$ tangenti comuni. Siccome poi ogni tangente dell' Hessiana ha due poli coincidenti nel punto coniugato al punto di contatto e gli altri due poli distinti nella Cayleyana (135), così le diciotto tangenti (ordinarie) comuni all' Hessiana ed alla cubica fondamentale toccano quest' ultima curva ne' punti in cui essa è incontrata dalla Cayleyana.

(b) In generale, se o, o' sono due poli coniugati, e se u' è il terzo punto comune all' Hessiana ed alla retta oo', questa tocca la Cayleyana nel punto ω coniugato armonico di u' rispetto ai due oo' (135, c). Ma allorchè o sia un flesso della cubica fondamentale, u' coincide con o'; epperò (4) anche ω si confonde con o'. Dunque la Cayleyana tocca l' Hessiana nei nove poli coniugati ai flessi della cubica fondamentale.

(c) Una tangente della Cayleyana, quale è $u'r$ (fig. 8.ª), sega questa curva in quattro punti $o_1 o_2 o_1' o_2'$, i quali sono le intersezioni di $u'r$ colle rette costituenti le coniche polari di o, o' (135). Quando o è un flesso della cubica fondamentale, la conica polare di o è costituita dalla tangente stazionaria oo' e dalla polare armonica, e quest' ultima si confonde con $u'r$, perchè u' ed o' coincidono insieme. Ond' è che de' due punti $o_1' o_2'$ l' uno cade in o' (od u') e l' altro si unisce all' intersezione di due tangenti infinitamente vicine $u'r$, $o'o_1'$ della Cayleyana, cioè al punto di contatto fra questa curva e la retta $u'r$. Questa retta ha dunque un contatto tripunto colla Cayleyana; e siccome questa curva, essendo della terza classe e del sest' ordine, non può avere altre singolarità all' infuori di nove cuspidi (99, 100), così:

Le polari armoniche dei nove flessi della cubica fondamentale sono tangenti alla Cayleyana nelle nove cuspidi di questa curva.

(d) L' Hessiana e la Cayleyana sono dotate di proprietà completamente *reciproche*. Infatti:

Una tangente qualunque della Cayleyana sega l' Hessiana in due punti corrispondenti, cioè aventi lo stesso tangenziale, ed in un terzo punto che è il coniugato armonico del punto di contatto della Cayleyana rispetto ai primi due (135, c).

In un punto qualunque o dell' Hessiana concorrono tre tangenti della Cayleyana; due di esse sono *corrispondenti*, cioè la retta che ne unisce i punti di contatto è una tangente della Cayleyana; la terza poi è la coniugata armonica, rispetto alle due prime, della tangente all' Hessiana in o (135, a).

---

*) Clebsch, *Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung* (Giornale Crelle-Borchardt, t. 58, Berlino 1861, p. 232).

Da questa perfetta reciprocità segue che le proprietà della Cayleyana si potranno conchiudere da quelle dell' Hessiana e viceversa. Per esempio:

I nove punti i, ne' quali l'Hessiana è toccata dalle sue tangenti stazionarie, sono i flessi anche delle infinite curve di terzo ordine passanti pei medesimi.

Al fascio di queste curve appartengono quattro trilateri, cioè i nove flessi sono distribuiti a tre a tre su dodici rette R, delle quali in ogni punto i ne concorrono quattro.

I vertici dei quattro trilateri sono i dodici punti r (*).

Fra le curve di terz' ordine aventi i flessi in comune coll' Hessiana v' è anche la cubica fondamentale C_3, rispetto alla quale l' Hessiana è il luogo di un punto che abbia per conica polare un pajo di rette, e la Cayleyana è l' inviluppo di queste rette.

Le tangenti stazionarie I' della cubica C_3 toccano l' Hessiana e la Cayleyana ne' punti i' comuni a queste due curve.

Le nove rette I tangenti alla Cayleyana nelle cuspidi, sono tangenti cuspidali per tutte le infinite curve di terza classe ch' esse toccano.

Alla serie di queste curve appartengono quattro triangoli, cioè le nove rette I concorrono a tre a tre in dodici punti r, ciascuna di quelle contenendo quattro di questi.

I lati dei quattro triangoli sono le dodici rette R.

Fra le curve di terza classe aventi per tangenti cuspidali le rette I ve n' ha una K_3 (**), rispetto alla quale la Cayleyana è l' inviluppo di una retta il cui primo inviluppo polare (82) sia una coppia di punti, e l' Hessiana è il luogo di questi punti.

Le cuspidi della curva K_3 sono i nove punti i' ove l' Hessiana e la Cayleyana si toccano.

142. Dato un fascio di cubiche, una trasversale qualunque le incontra in terne di punti formanti un' involuzione di terzo grado, e ne' punti doppi di questa la trasversale tocca quattro cubiche del fascio (49). Se le cubiche sono sizigetiche (ossia se hanno i nove flessi comuni) e se la trasversale è la polare armonica I di un flesso i, le tre intersezioni di una qualunque fra quelle cubiche sono i punti di contatto fra essa e le tangenti che convergono al flesso i (139). Sia r uno de' punti doppi dell' involuzione; la cubica passante per r toccherà ivi sì la trasversale I che la retta ri, cioè avrà in r un punto doppio. Ma i soli punti doppi in un fascio di cubiche sizigetiche sono le intersezioni scambievoli delle terne di rette contenenti a tre a tre i flessi (140, b); dunque i quattro trilateri (sizigetici) formati da tali rette hanno i loro vertici allineati a quattro a quattro sulle polari armoniche de' flessi.

Di qui si ricava che, se r è un vertice di un trilatero sizigetico, r dovrà giacere nella polare armonica di ciascuno de' tre flessi situati nel lato opposto del trilatero medesimo; ossia:

I punti in cui si segano a tre a tre le polari armoniche dei flessi sono i vertici dei quattro trilateri formati dalle dodici rette nelle quali giacciono distribuiti a tre a tre i flessi medesimi (***).

Considerando uno qualunque de' trilateri sizigetici, i suoi lati contengono i nove flessi, mentre pei vertici passano le nove polari armoniche. Sia r uno dei vertici ed 123 i flessi giacenti nel lato opposto. Siccome per r passano le

(*) Questa proprietà sarà dimostrata fra poco (142).
(**) È desiderabile una definizione di questa curva come inviluppo di una retta variabile.
(*** Hesse, *Eigenschaften der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung u. s. w.* (Giornale di Crelle, t. 38, Berlino 1849, p. 257—261).

polari armoniche di 123, le quali fanno parte delle coniche polari di questi punti rispetto a tutte le cubiche sizigetiche del dato fascio (140), così la retta 123 sarà, relativamente a tutte queste curve, la retta polare del punto r (130, a). Dunque ciascun vertice di un trilatero sizigetico è polo del lato opposto rispetto a tutte le cubiche sizigetiche.

143. Proseguendo a studiare il fascio delle cubiche sizigetiche, una qualunque di esse sia incontrata dalla polare armonica I del flesso i ne' punti $mm'm''$, onde in questi punti le tangenti alla curva saranno $i(m, m', m'')$. La tangente (stazionaria) alla cubica medesima nel flesso i incontri I in n. La cubica è individuata da uno qualunque de' quattro punti $nmm'm''$, epperò, al variare di quella, la terna $mm'm''$ genera un' involuzione (di terzo grado) projettiva alla semplice punteggiata formata dai punti n.

Se $rr_1r_2r_3$ sono i punti doppi dell' involuzione, essi sono anche (142) vertici de' quattro trilateri sizigetici; siano poi $ss_1s_2s_3$ le intersezioni dei lati rispettivamente opposti colla retta I. Per queste *cubiche trilatere*, le tangenti al flesso i sono evidentemente gli stessi lati $i(s, s_1, s_2, s_3)$; ond' è che, ogniqualvolta i due punti $m'm''$ coincidono in r, i punti mn si confondono insieme con s.

La retta in, che tocca una cubica del fascio nel flesso i, è anche tangente all' Hessiana di questa nel punto n (141). Dunque, se una data cubica del fascio incontra la retta I ne' punti $mm'm''$, le rette $i(m, m', m'')$ sono tangenti nel flesso i ad altrettante cubiche del fascio, aventi per Hessiana la curva data. Ossia una data cubica è, in generale, Hessiana di tre altre cubiche sizigetiche ad essa (*).

(a) Se la cubica data è un trilatero, un vertice del quale sia r ed il lato opposto passi per s, le tre tangenti $i(m', m'')$, im riduconsi alle due ir, is. La seconda di queste rette può risguardarsi come tangente stazionaria della cubica data, la quale è per tal modo Hessiana di sè stessa. E l' altra retta ir sarà tangente in i ad una cubica (del fascio) avente per Hessiana il dato trilatero. Dunque ciascuna cubica trilatera è Hessiana di sè stessa e di un' altra cubica (del fascio). Cioè in un fascio di cubiche sizigetiche vi sono quattro curve le cui Hessiane sono i quattro trilateri del fascio.

(b) Cerchiamo se nel dato fascio vi abbia alcuna cubica che sia Hessiana della propria Hessiana. Una cubica C ha per Hessiana un' altra cubica, e l' Hessiana di questa è una nuova cubica C'. Assunta invece ad arbitrio nel fascio la curva C', questa è Hessiana di tre cubiche, ciascuna delle quali è alla sua volta Hessiana di tre altre cubiche C; talchè C' dà nove cubiche C. Siccome le cubiche C, C' sono individuate dalle rispettive tangenti in i (46), od anche dai punti n, n' in cui queste segano la polare armonica I, possiamo dire che ad ogni punto n corrisponde un solo punto n', mentre a ciascun punto n' corrispondono nove punti n; quindi la coincidenza di due punti corrispondenti n, n' avrà luogo dieci volte, cioè vi sono dieci cubiche sodisfacenti alla condizione proposta. Di questo numero sono i quattro trilateri sizigetici; epperò, lasciatili da parte, avremo:

(*) Hesse, *Ueber die Elimination der Variabeln u. s. w.* Giornale di Crelle, t. 28, Berlino 1844, p. 89.

Un fascio di cubiche sizigetiche contiene sei cubiche, ciascuna delle quali è Hessiana della propria Hessiana (*).

144. Vogliamo ora trovare la relazione segmentaria esprimente la projettività che ha luogo fra l' involuzione di terzo grado formata dai punti $mm'm''$ e la semplice serie generata dal punto n (143). Preso per origine de' segmenti un punto r, cioè quel vertice di uno de' trilateri sizigetici che cade nella retta I; e chiamato m uno qualunque de' punti $mm'm''$, la projettività di che si tratta sarà espressa da un' equazione della forma (24, a):

$$1)\quad (A.rn + A')\overline{rm}^3 + 3(B.rn + B')\overline{rm}^2 + 3(C.rn + C')\,rm + D.rn + D' = 0,$$

ove $A, A', B, \ldots$ sono coefficienti costanti. Il punto s corrispondente ad r (143) suppongasi a distanza infinita, com' è lecito fare senza sminuire la generalità dell' indagine; perchè trattandosi qui di relazioni fra rapporti anarmonici, possiamo ai punti nella retta I sostituire le loro projezioni fatte da un centro arbitrario sopra una retta parallela al raggio che passa per s (18).

Ciò premesso, siccome i tre valori di rm corrispondenti ad $rn = rs = \infty$ devono essere $rm = rs$, $rm' = 0$, $rm'' = 0$, così se ne trae $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$.

D' altronde s è un punto della retta polare di r rispetto a qualunque cubica del fascio (142), quindi (11):

$$\frac{3}{rs} = \frac{1}{rm} + \frac{1}{rm'} + \frac{1}{rm''} = -\frac{3C'}{D'};$$

ma rs è infinito, dunque $C' = 0$. Così l' equazione 1) diviene:

$$2)\quad A'.\overline{rm}^3 + 3(B.rn + B')\overline{rm}^2 + D' = 0.$$

La condizione affinchè la 2), considerando rm come incognita, abbia due radici eguali è:

$$3)\quad A'^2D' + 4(B.rn + B')^3 = 0,$$

cioè questa equazione del terzo grado rispetto ad rn darà quei tre punti n ($s_1s_2s_3$) a ciascuno dei quali, come ad s, corrispondono due punti m coincidenti ($r_1r_2r_3$).

Se nella stessa equazione 2) si fa $rm = rn$, ottiensi:

$$4)\quad (A' + 3B)\overline{rn}^3 + 3B'.\overline{rn}^2 + D' = 0,$$

ossia ciascuno de' punti n dati dalla 4) coincide con uno de' corrispondenti punti m. Ma i punti n dotati di tale proprietà sono (oltre ad s) gli stessi punti $s_1s_2s_3$ dati dalla 3); dunque le equazioni 3), 4), dovendo ammettere le stesse soluzioni, avranno i coefficienti proporzionali.

(*) Salmon, *Higher plane curves*, p. 184. — Aronhold, *Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln* (Giornale di Crelle, t. 39, Berlino 1850, p. 153).

L' equazione 4) non contiene l' rn lineare; onde eguagliando a zero il coefficiente di rn nella 3), si avrà $BB'^2 = 0$, ossia $B' = 0$; perchè il porre $B = 0$ farebbe scomparire il segmento rn dalla 2). Quindi le 3), 4) divengono:

$$4B^3 . \overline{rn}^3 + A'^2 D' = 0 , \qquad (A' + 3B)\, \overline{rn}^3 + D' = 0 ,$$

donde eliminando rn si ha:

$$5) \qquad (A' - B)(A' + 2B)^2 = 0.$$

Posto $A' = B$ e per brevità $D' = -4h^3 B$, ovvero posto $A' = -2B$ e per brevità $D' = -h^3 B$, le equazioni 3), 4) in entrambi i casi danno:

$$6) \qquad \overline{rn}^3 - h^3 = 0 ,$$

e le radici di questa equazione saranno rs_1, rs_2, rs_3.

Fatto adunque $h^3 = \overline{rn}^3$, $B' = 0$ ed inoltre $A' = B$, ovvero $A' = -2B$, l' equazione 2) diviene nel primo caso:

$$7) \qquad (rm - rn)(rm + 2rn)^2 = 0 ,$$

e nel secondo:

$$(rm - rn)^2 (2rm + rn) = 0.$$

Cioè nel primo caso uno de' tre punti m corrispondenti ad $n = (s_1, s_2, s_3)$ coincide collo stesso n, mentre gli altri due si riuniscono in un sol punto (r_1, r_2, r_3) diverso da n. Nel secondo caso invece, due de' tre punti m corrispondenti ad $n = (s_1, s_2, s_3)$ cadrebbero in n. Ma nella quistione che ci occupa si verifica il primo caso, non il secondo (143); ond' è che dobbiamo assumere $A' = B$, non già $A' = -2B$.

Dunque la richiesta equazione per la projettività fra l' involuzione formata dalle terne di punti $mm'm''$ e la semplice punteggiata formata dai punti n può essere scritta così:

$$8) \qquad \overline{rm}^3 + 3rn . \overline{rm}^2 - 4h^3 = 0 ,$$

ove h esprime un coefficiente costante.

(a) I punti $s_1 s_2 s_3$ sono dati dall' equazione 6), ed i punti $r_1 r_2 r_3$ dalla 7):

$$rm + 2rn = 0 ,$$

ossia dalla:

$$\overline{rm}^3 + 8h^3 = 0 ;$$

dunque entrambi i sistemi di quattro punti $ss_1s_2s_3$, $rr_1r_2r_3$ sono equianarmonici (27).

Ne consegue che, se i è un flesso *reale* delle cubiche sizigetiche, due de' quattro vertici r giacenti nella polare armonica I sono reali, gli altri due imaginari (26). E per la reciprocità già avvertita (141, d), due delle quattro rette R (lati de' trilateri sizigetici) concorrenti in i saranno reali, le altre due imaginarie. Che almeno uno de' flessi di una cubica sia reale, risulta

manifesto dall' essere *dispari* il numero totale delle intersezioni della cubica coll' Hessiana.

Sia dunque 1 un flesso reale; e delle quattro rette R (140, b), cioè 123, 148, 157, 169, siano reali le prime due, imaginarie coniugate le altre. I quattro flessi 57, 69 saranno necessariamente tutti imaginari, ed invero uno de' primi due sarà coniugato ad uno degli altri due. Siano coniugati 5 e 9, 6 e 7. Le due rette reali 59, 67, e le due rette imaginarie coniugate 56, 79 si segano separatamente in due punti reali r, r_1, situati nella polare armonica del flesso 1 (139, a).

Essendo reali le rette 123, 148, i flessi 23, e così pure 48, sono o entrambi reali, o imaginari coniugati. D' altronde le coppie di rette [24, 38], [28, 34] devono dare gli altri due vertici r_2, r_3, situati in linea retta con r, r_1. Ma $r_2 r_3$ sono imaginari, dunque i punti 2348 non possono essere nè tutti reali, nè tutti imaginari; cioè 23 sono reali, e 48 imaginari.

Da ciò segue che de' nove flessi di una cubica tre soli (in linea retta) sono reali, essendo gli altri imaginari coniugati a due a due (*). E delle dodici rette R, che contengono le terne de' flessi, quattro [123, 148, 259, 367] sono reali; le altre no. Uno de' quattro trilateri sizigetici ha un solo vertice reale; un altro ne ha tre; i rimanenti nessuno.

(b) Come si è supposto sin qui, sia m uno de' punti in cui una data cubica del fascio sega la retta I, e sia n l' intersezione di questa medesima retta colla tangente al flesso i. Supponiamo poi che i punti M, N abbiano analogo significato per l' Hessiana della cubica suddetta; avremo similmente alla 8):

$$\overline{rM}^3 + 3rN . \overline{rM}^2 - 4h^3 = 0.$$

Ma l' Hessiana passa, come si è già osservato (143), pel punto n, talchè sarà:

$$9) \qquad \overline{rn}^3 + 3rN . \overline{rn}^2 - 4h^3 = 0,$$

donde, dato il punto n, si desume il punto N. Per esempio, se n cade in r, si ha $rN = \infty$, cioè N coincide con s; e se n è uno de' punti $r_1 r_2 r_3$, ossia se n è dato dall' equazione:

$$\overline{rn}^3 + 8h^3 = 0,$$

si ottiene:

$$2rN + rn = 0,$$

vale a dire, N è uno de' punti $s_1 s_2 s_3$. Di qui si ricava che le cubiche sizigetiche le cui tangenti al flesso i passano per uno de' punti $r r_1 r_2 r_3$ hanno per Hessiane i trilateri sizigetici; come già si è trovato altrove (143, a).

Se invece è dato il punto N, l' equazione 9) dà i tre punti n corrispondenti alle tre cubiche, la comune Hessiana delle quali è la curva relativa al dato punto N (143).

---

*) Plücker, *System der analytischen Geometrie*, p. 265.

(c) Se la cubica data è Hessiana della propria Hessiana (143, b), si avrà oltre l' equazione 9) anche la:

$$\overline{rN}^3 + 3rn \, . \, \overline{rN}^2 - 4h^3 = 0.$$

Sottraggasi questa dalla 9), e dalla risultante, omesso il fattore $rn - rN$ che corrisponde alle cubiche trilatere, si elimini rN mediante la medesima 9); ottiensi così la:

$$10) \qquad \overline{rn}^6 - 20h^3 \, . \, \overline{rn}^3 - 8h^6 = 0,$$

equazione di sesto grado, che dà i sei punti n corrispondenti alle sei cubiche dotate della proprietà d' essere Hessiane delle proprie Hessiane.

145. Le quattro tangenti che in generale si possono condurre ad una cubica da un suo punto, nel caso che questo sia il flesso i, sono le rette $i(n, m, m', m'')$. Ond' è che il rapporto anarmonico della cubica (131, b) sarà quello de' quattro punti $nmm'm''$, ne' quali la polare armonica del flesso è incontrata dalla tangente stazionaria e dalla cubica medesima.

Ciò premesso, possiamo ricercare quali fra le cubiche sizigetiche del dato fascio sono equianarmoniche e quali armoniche (131, b).

Siccome i tre punti $mm'm''$ sono dati dalla 8), così i quattro punti $nmm'm''$ saranno rappresentati dall' equazione:

$$11) \qquad \overline{rm}^4 + 2rn \, . \, \overline{rm}^3 - 3\overline{rn}^2 \, . \, \overline{rm}^2 - 4h^3 \, . \, rm + 4h^3 \, . \, rn = 0,$$

che si ottiene moltiplicando la 8) per $rm - rn$.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la 11) esprima un sistema equianarmonico è (27):

$$rn\,(\overline{rn}^3 + 8h^3) = 0,$$

che rappresenta i quattro punti $rr_1r_2r_3$. Dunque (144, b) un fascio di cubiche sizigetiche contiene quattro curve equianarmoniche, ciascuna delle quali è anche dotata della proprietà d' aver per Hessiana un trilatero (sizigetico).

Affinchè la 11) rappresenti un sistema armonico, dev' essere (6):

$$\overline{rn}^6 - 20h^3 \, . \, \overline{rn}^3 - 8h^6 = 0.$$

Quest' equazione coincide colla 10); dunque un fascio di cubiche sizigetiche contiene sei curve armoniche, le quali sono anche le cubiche dotate della proprietà d' essere Hessiane delle proprie Hessiane (*).

(*) SALMON, *Higher plane curves*, p. 192.

Art. XXIV. La curva di terz' ordine considerata come Hessiana di tre diverse reti di coniche.

146. Una data cubica qualsivoglia C_3 può risguardarsi come Hessiana di tre altre cubiche ad essa sizigetiche (143). Ciascuna di queste tre curve dà origine ad una rete di coniche polari, epperò la cubica data sarà l' Hessiana di tre distinte reti di coniche. Rispetto a ciascuna di queste tre reti, la cubica data è il luogo delle coppie de' poli coniugati (132, b); dunque in tre guise diverse i punti di una cubica possono essere coniugati a due a due, per modo che due punti coniugati abbiano lo stesso tangenziale, ossia nella cubica esistono tre sistemi di punti corrispondenti (133, a).

Ed invero, se o è un punto della cubica data ed u è il tangenziale di esso, da u partono, oltre uo, altre tre tangenti (130, d); siano o' o'' o''' i punti di contatto. Abbiamo così le tre coppie di poli coniugati oo', oo'', oo''', in relazione alle tre diverse reti che hanno per comune Hessiana la cubica data.

Applicando lo stesso discorso a ciascuno de' punti o' o'' o''', come al punto o, si vede tosto che per la prima rete sono poli coniugati oo' ed $o''o'''$; per la seconda oo'' ed $o'''o'$; per la terza oo''' ed $o'o''$.

(a) Essendo oo', $o''o'''$ due coppie di poli coniugati relative ad una stessa rete, se le rette oo'', $o'o'''$ si segano in y e le oo''', $o'o''$ in z, anche yz sarà una coppia di poli coniugati relativi alla stessa rete (134).

I punti o, o'', y sono in linea retta, epperò i loro tangenziali (che sono anche i tangenziali ordinatamente de' punti o', o''', z) saranno allineati in una seconda retta (39, b). Ma i tangenziali di o, o'' coincidono in u; dunque il tangenziale comune di y e z sarà anche il tangenziale di u. Donde si raccoglie che:

Se o o' o'' o''' sono i punti ove una cubica è toccata dalle tangenti condotte da un suo punto u, i punti diagonali x y z del quadrangolo $oo'o''o'''$ giacciono nella cubica, e le tangenti a questa in u x y z concorrono in uno stesso punto della curva.

(b) Dal teorema (134) risulta che, se aa', bb' sono due coppie di punti corrispondenti della cubica, affinchè questi siano relativi ad uno stesso sistema è necessario e sufficiente che il punto comune alle ab, $a'b'$ ed il punto comune alle ab', $a'b$ giacciano nella curva. Laonde, avuto riguardo alla proprietà (45, d), potremo concludere la seguente:

Se un quadrilatero completo è inscritto in una cubica, i vertici opposti formano tre coppie di punti corrispondenti relative ad uno stesso sistema.

Qui si offre immediatamente la ripartizione in tre diversi sistemi de' quadrilateri completi inscritti in una cubica.

(c) Siano aa_1, bb_2 due coppie di poli coniugati relative a due reti diverse; α il tangenziale di a ed a_1; β il tangenziale di b e b_2. Siano c, c_3, γ le terze intersezioni della cubica colle rette ab, a_1b_2, $\alpha\beta$; sarà γ il tangenziale sì di c che di c_3. Dunque c, c_3 sono due poli coniugati, relativi però

alla terza rete (b). Così pure, se le rette ab_2, a_1b segano la cubica nei punti c_2, c_1, questi sono poli coniugati rispetto alla terza rete medesima (*).

147. Dato un punto o ed un fascio di coniche circoscritte ad un quadrangolo $efgh$, quale è il luogo de' punti di contatto delle tangenti condotte da o a queste coniche? Siccome per o si può condurre una conica del fascio e quindi ad essa la tangente in o, così il luogo richiesto passa per o. Oltre ad o, ogni trasversale tirata per questo punto ne contiene altri due del luogo, e sono i punti doppi dell' involuzione che le coniche del fascio determinano sulla trasversale (49). Dunque il luogo richiesto è una cubica, la quale passa anche per $efgh$, poichè si può descrivere una conica del fascio che tocchi oe in e, ovvero of in f, ecc.

Ciascuna conica del fascio sega la cubica in altri due punti m, m' (oltre $efgh$), che sono quelli ove la conica tocca le tangenti condotte per o. La retta mm', polare di o rispetto alla conica, passa per un punto fisso u (il punto *opposto* ai quattro $efgh$) (65). Quando la conica passa per o, i due punti mm' coincidono in o; laonde questa conica tocca la cubica in o, ed u è il tangenziale di o.

Fra le coniche del fascio vi sono tre sistemi di due rette, e sono le coppie di lati opposti (ef, gh), (eg, fh), (eh, fg) del quadrangolo dato; per ciascuno di essi i punti mm' coincidono nel relativo punto diagonale. Donde segue che i punti diagonali o' o'' o''' del quadrangolo appartengono alla cubica, e le tangenti in questi punti concorrono in u.

Siccome le rette $o(e, f, g, h)$ sono tangenti alla cubica in e, f, g, h, così la conica determinata dai cinque punti $oefgh$ è la prima polare del punto o rispetto alla cubica medesima. Analogamente la conica $uoo'o''o'''$ è la prima polare di u.

148. Sia o un punto qualunque di una data cubica C_3, ed u il tangenziale di o. Se K_3 è una cubica, la cui Hessiana sia C_3, la conica polare di u rispetto a K_3 è un pajo di rette, una delle quali passa per o (133, b); dunque la retta polare di o rispetto a K_3 passa per u. Ma u giace anche nella retta polare di o relativa a C_3, giacchè quest' ultima curva è toccata in o dalla retta ou; dunque in u concorreranno le rette polari di o, relative a tutte le cubiche descritte pei punti comuni a C_3 e K_3 (84, c), ossia:

Se una retta tocca una cubica in un punto o e la sega in un altro punto u, le rette polari di o, rispetto alle cubiche sizigetiche colla data, passano tutte per u (**).

(a) Siano $oo'o''o'''$ i punti di contatto delle tangenti condotte alla cubica data dal punto u; pel teorema precedente, u giace nelle rette polari di ciascuno dei quattro punti suddetti, rispetto a tutte le cubiche sizigetiche. Dunque le coniche polari di u rispetto alle cubiche medesime passeranno per $oo'o''o'''$ (***).

Le tre coppie di lati opposti del quadrangolo $oo'o''o'''$ sono le coniche

---

(*) HESSE, *Ueber Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren* (Giornale di CRELLE, t. 36, Berlino 1848, p. 148—152).

(**) SALMON, *On curves of the third order*, p. 535.

(***) CAYLEY, *A Memoir on curves etc.* p. 413.

polari di u rispetto a quelle tre curve sizigetiche la cui Hessiana è C_3, epperò saranno tangenti alle tre corrispondenti Cayleyane.

(b) Si noti inoltre che $o'o''o'''$ sono i punti diagonali del quadrangolo formato dai quattro punti di contatto delle tangenti condotte alla cubica data dal punto o (146, a); dunque o' è il polo della retta $o''o'''$ rispetto alle coniche polari di o relative a tutte le cubiche sizigetiche (108, b); ecc.

149. Siano $\alpha\beta\gamma$ i tre punti in cui una retta sega una data cubica, ed $a_0a_1a_2a_3$, $b_0b_1b_2b_3$, $c_0c_1c_2c_3$ i punti di contatto delle tangenti che da quelli si possono condurre alla curva. Siccome i tangenziali di tre punti in linea retta sono pur essi in linea retta, così la retta che unisce uno de' punti a con uno de' punti b passerà necessariamente per uno de' punti c; epperò i dodici punti abc giacciono a tre a tre in sedici rette (*).

Siano $a_0b_0c_0$ tre punti scelti fra quei dodici in modo che siano allineati sopra una retta; e siano $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ i punti *corrispondenti* a quelli rispettivamente nelle tre reti di coniche, alle quali dà nascimento la data cubica considerata come Hessiana (146). Pel teorema (134) sono in linea retta le terne di punti:

$$a_0b_1c_1,\quad b_0c_1a_1,\quad c_0a_1b_1,$$
$$a_0b_2c_2,\quad b_0c_2a_2,\quad c_0a_2b_2,$$
$$a_0b_3c_3,\quad b_0c_3a_3,\quad c_0a_3b_3,$$

oltre ad

$$a_0b_0c_0.$$

E pel teorema (146, c) sono in linea retta anche le terne:

$$a_1b_2c_3,\quad a_2b_3c_1,\quad a_3b_1c_2,$$
$$a_1b_3c_2,\quad a_2b_1c_3,\quad a_3b_2c_1.$$

Queste sedici rette si possono aggruppare in otto sistemi di quattro rette ciascuno, le quali contengano tutt' i dodici punti di contatto (**).

(a) I punti $a_1b_1c_1$, che corrispondono ad $a_0b_0c_0$ rispetto ad una medesima rete, sono i vertici di un triangolo i cui lati passano ordinatamente per a_0, b_0, c_0, (134), e sono anche i punti di contatto della cubica colla poloconica della retta $a_0b_0c_0$, relativa a quella rete (137). Dunque (39) le rette che uniscono i punti $a_1b_1c_1$ ai vertici del triangolo formato dalle tre tangenti αa_1, βb_1, γc_1, concorreranno in uno stesso punto, che è il polo della retta $\alpha\beta\gamma$ rispetto alla conica suddetta (***).

È superfluo accennare che la stessa proprietà compete ai punti $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$, che sono i corrispondenti di $a_0b_0c_0$ rispetto alle altre due reti.

(b) Le rette a_0b_0, a_1b_1 s' incontrano sulla data curva in c_0, onde questa passa sì pei punti comuni ai due sistemi di tre rette $(\alpha a_0, \beta b_0, \gamma c_0)$, $(\alpha\beta, a_0b_0, a_0b_0)$, sì pei punti comuni agli altri due analoghi sistemi $(\alpha a_1, \beta b_1, \gamma c_0)$, $(\alpha\beta, a_1b_1, a_1b_1)$.

(*) Plücker, *System der analytischen Geometrie*, p. 272.
(**) Hesse, *Ueber Curven dritter Ordnung u. s. w.* p. 153.
(***) Plücker, *System der analytischen Geometrie*, p. 46.

Saravvi adunque (50, b) un luogo di terz' ordine sodisfacente alla duplice condizione di passare pei punti comuni ai due sistemi $(\alpha a_0, \beta b_0, \gamma c_0)$, $(\alpha a_1, \beta b_1, \gamma c_0)$, e di contenere le intersezioni dei due sistemi $(\alpha\beta, a_0 b_0, a_0 b_0)$, $(\alpha\beta, a_1 b_1, a_1 b_1)$. Queste due condizioni sono appunto sodisfatte dal sistema di tre rette $(\alpha\beta, [01][10], \gamma c_0)$, ove $[01]$ indica il punto comune alle rette αa_0, βb_1, ed $[10]$ il punto ove si segano le αa_1, βb_0. D' altronde, qualunque luogo di terz' ordine appartenente al fascio determinato dai due sistemi $(\alpha\beta, a_0 b_0, a_0 b_0)$, $(\alpha\beta, a_1 b_1, a_1 b_1)$ non può essere altrimenti composto che della retta $\alpha\beta$ e di un pajo di rette coniugate nell' involuzione quadratica i cui raggi doppi sono $a_0 b_0$, $a_1 b_1$ (*). Dunque la retta $[01][10]$ passa pel punto c_0 ed è coniugata armonica di γc_0 rispetto alle $a_0 b_0$, $a_1 b_1$ (25, a).

(c) Per la stessa ragione, se αa_0 incontra βb_2, βb_3 in $[02]$, $[03]$, e se βb_0 incontra αa_2, αa_3 in $[20]$, $[30]$, le rette $[02][20]$, $[03][30]$ passano per c_0. Laonde, rappresentato con $[00]$ il punto comune alle αa_0, βb_0, i due sistemi di quattro punti $[00, 01, 02, 03]$, $[00, 10, 20, 30]$ avranno eguali rapporti anarmonici, imperocchè essi risultano dal segare colle due trasversali αa_0, βb_0 uno stesso fascio di quattro rette concorrenti in c_0. Ne segue che i rapporti anarmonici de' due fasci $\alpha(a_0, a_1, a_2, a_3)$, $\beta(b_0, b_1, b_2, b_3)$ sono eguali, ossia che i sei punti $[00]$, $[11]$, $[22]$, $[33]$, α, β giacciono in una stessa conica, come si è già dimostrato altrove (131, a).

Analogamente, concorrendo in c_1 le quattro rette $a_0 b_1$, $a_1 b_0$, $a_2 b_3$, $a_3 b_2$, i due fasci $\alpha(a_0, a_1, a_2, a_3)$, $\beta(b_1, b_0, b_3, b_2)$ avranno eguali rapporti anarmonici; ecc.

(d) Come nel punto	c_0	concorrono le rette	$[01][10]$, $[02][20]$, ...
così »	c_1	»	$[00][11]$, $[22][33]$, ...
»	c_2	»	$[00][22]$, $[33][11]$, ...
»	c_3	»	$[00][33]$, $[11][22]$, ...(**).

Dunque i punti $[00]$, $[11]$, $[22]$, $[33]$, ove si segano i raggi omologhi de' due fasci projettivi $\alpha(a_0, a_1, a_2, a_3)$, $\beta(b_0, b_1, b_2, b_3)$, formano un quadrangolo completo, i cui punti diagonali c_1, c_2, c_3 appartengono alla cubica e sono i punti di contatto di tre tangenti concorrenti in γ, terza intersezione della curva colla retta $\alpha\beta$.

Quando i punti $\alpha\beta$ coincidano, ritroviamo un teorema già dimostrato (146, a).

(e) I punti α, β sono i centri di due fasci projettivi, ne' quali alle rette $\alpha(a_0, a_1, a_2, a_3)$ corrispondono $\beta(b_0, b_1, b_2, b_3)$. Condotta per α una retta qualunque che seghi βb_0 nel punto $[x0]$; unito $[x0]$ con c_0 mediante una retta che seghi αa_0 in $[0x]$; sarà $\beta[0x]$ la retta corrispondente ad $\alpha[x0]$. In questo modo si trova che alla retta $\alpha\beta$ corrisponde βc_0 od αc_0, secondo che $\alpha\beta$ si consideri appartenente al fascio α o β. Dunque (59) αc_0, βc_0 so-

---

(*) Se le coniche d' un fascio hanno un punto doppio comune c_0, cioè se ciascuna di esse consta di due rette incrociate in c_0, tutte le analoghe coppie di rette formano evidentemente un' involuzione, i cui raggi doppi rappresentano le due linee del fascio per le quali c_0 è una cuspide (18).

(**) In ciascuno de' punti c concorrono sei rette analoghe a $(01)(10)$.

no le tangenti in α, β alla conica generata dai due fasci projettivi; ossia (107) c_0 è il polo della retta $\alpha\beta$ rispetto alla conica $\alpha\beta[00][11][22][33]$.

Analogamente, i punti c_1, c_2, c_3 sono i poli della retta $\alpha\beta$ rispetto alle altre tre coniche passanti per $\alpha\beta$ e per le intersezioni delle tangenti che concorrono in α ed in β (131, a). Ossia:

Le tangenti che si possono condurre ad una cubica da due suoi punti α, β si segano in sedici punti $[xy]$ situati a quattro a quattro in quattro coniche passanti per α e β.

I poli della retta $\alpha\beta$ rispetto a queste coniche giacciono nella cubica, la quale è ivi toccata da quattro rette concorrenti in γ, terza intersezione della curva colla retta $\alpha\beta$.

I poli di $\alpha\beta$ rispetto a tre qualunque fra quelle coniche sono i punti diagonali del quadrangolo completo avente per vertici i quattro punti $[xy]$ situati nella quarta conica (*).

(f) La conica polare di c_0, oltre al toccare la cubica in c_0, la seghi ne' punti $pqrs$. Ogni conica passante per $pqrs$ incontra la cubica in due altri punti che sono in linea retta col punto γ, tangenziale di c_0 (147); dunque la conica descritta per $pqrs$ ed α passerà anche per β.

Si noti poi che il quadrangolo completo $pqrs$ ha i suoi punti diagonali in $c_1c_2c_3$, cioè ne' punti che hanno il tangenziale comune con c_0 (146, a). Ne segue che il triangolo $c_1c_2c_3$ è coniugato rispetto ad ogni conica circoscritta al quadrangolo $pqrs$.

Ma siccome $c_1c_2c_3$ sono anche i punti diagonali del quadrangolo $[00][11][22][33]$, così il triangolo $c_1c_2c_3$ è pur coniugato rispetto alla conica nella quale giacciono i sei punti $\alpha\beta[00][11][22][33]$. Dunque (108, e) questa conica passa anche per $pqrs$ (**).

150. Se nel metodo generale (67, c) per costruire il punto *opposto* a quattro punti di una cubica C_3 si suppone che questi, coincidendo per coppie, si riducano a due soli a, b, il punto opposto γ sarà in linea retta coi tangenziali α, β di a, b, cioè sarà il tangenziale della terza intersezione c della cubica colla retta ab. Ogni retta condotta per γ sega la cubica in altri due punti mn, pei quali passa una conica tangente in a e b alla cubica medesima; onde, se i punti mn coincidono, la conica e la cubica avranno fra loro tre contatti bipunti. Pel punto γ passano quattro rette tangenti a C_3; uno de' punti di contatto, c, è in linea retta con ab; gli altri tre siano $c_1c_2c_3$, e consideriamo la conica tangente in abc_1. I punti cc_1 sono poli coniugati rispetto ad una delle tre reti di coniche, l' Hessiana delle quali è la cubica data (146); e se b_1 è il polo coniugato a b nella stessa rete, la retta b_1c_1

(*) Salmon, *Théorèmes sur les courbes de troisième degré*, p. 276. — *Higher plane curves*, p. 134.

(**) Samuel Roberts, *On the intersections of tangents drawn through two points on a curve of the third degree* (Quaterly Journal of pure and applied Mathematics, vol. 3, London 1860, p. 121).

passerà per a, e le bc_1, b_1c si taglieranno in a_1, polo coniugato ad a rispetto alla medesima rete (134). Vale a dire, se la cubica è toccata in abc_1 da una curva di second' ordine, i poli a_1b_1c coniugati ad abc_1 rispetto ad una delle tre reti sono in linea retta; donde segue che, rispetto alla rete medesima, quella curva di second' ordine è la poloconica della retta a_1b_1c (137). Analogamente, se a_2b_2, a_3b_3 sono i punti corrispondenti ad ab nelle altre due reti, le coniche tangenti in abc_2, abc_3 sono le poloconiche delle rette a_2b_2c, a_3b_3c rispetto a queste reti.

Così le coniche tangenti ad una cubica in tre punti si distribuiscono in tre sistemi, relativi alle tre reti aventi per comune Hessiana la cubica data. I sei punti di contatto di due coniche d' uno stesso sistema giacciono in una conica segante; e viceversa, se pei tre punti di contatto d' una conica d' un certo sistema si descriva ad arbitrio una linea di second' ordine, questa sega la cubica in tre nuovi punti, ne' quali questa curva è toccata da un' altra conica dello stesso sistema (137, a).

Se una poloconica dee passare per due punti dati o, o', la retta a cui essa corrisponde sarà tangente alla conica polare di o ed a quella di o' (136, a). Ma due coniche hanno quattro tangenti comuni; dunque per due punti dati ad arbitrio passano dodici coniche (quattro per ciascun sistema) aventi tre contatti bipunti colla data curva di terz' ordine.

La poloconica di una tangente stazionaria, per ciascuna delle tre reti, ha un contatto sipunto coll' Hessiana (137); vi sono adunque ventisette coniche (nove in ciascun sistema) aventi un contatto sipunto colla cubica data (*). I punti di contatto sono quelli che nei tre sistemi corrispondono ai nove flessi, vale a dire, sono i punti in cui la cubica è toccata dalle tangenti condotte per uno de' flessi (39, d). Uno qualunque di questi punti chiamisi p, q od r, secondo che appartenga all' uno o all' altro dei tre sistemi.

Tre flessi in linea retta ed i nove punti pqr che ad essi corrispondono, nei tre sistemi, formano un complesso di dodici punti ai quali si possono applicare le proprietà (149). Dunque:

Ogni retta che unisca due punti p (dello stesso sistema) passa per un flesso;

Ogni retta che unisca due punti pq (di due diversi sistemi) sega la cubica in un punto r (del terzo sistema).

Ed inoltre (137, a):

I sei punti p che (in uno stesso sistema) corrispondono a sei flessi allineati sopra due rette, giacciono in una conica (**).

(*) STEINER, *Geometrische Lehrsätze* (Giornale di CRELLE, t. 32, Berlino 1846, p. 132).

(**) HESSE, *Ueber Curven dritter Ordnung u. s. w.* p. 165-175.

Oltre alle Memorie citate in questo e nel precedente articolo veggansi le seguenti:

MÖBIUS, *Ueber die Grundformen der Linien der dritter Ordnung* (Abhandlungen der k. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, I. Bd, Leipzig 1849, p. 40).

BELLAVITIS, *Sulla classificazione delle curve del terz' ordine* (Memorie della Società Italiana delle scienze, t. 25, parte 2., Modena 1851, p. 33). — *Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica* (Memorie dell' Istituto Veneto, vol. 8, Venezia 1860, p. 312).

Fig.a 1.a

Fig.a 2.a

Fig.a 3.a

Fig.a 4.a

Fig.a 5.a

Fig.a 6.a

Fig.a 7.a

Fig.a 8.a